

ARCHIVE HAWAII
LIBRARY

for
MAY 25 '61

RATIONAL MECHANICS
and
ANALYSIS

Edited by

C. TRUESDELL

Volume 7, Number 4



SPRINGER-VERLAG
BERLIN-GÖTTINGEN-HEIDELBERG

(Postverlagsort Berlin · 12. 4. 1961)

Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quae per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus.

NEWTON

La généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouir nos lumières, nous découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, & on y trouvera des raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté & la simplicité.

EULER

... ut proinde his paucis consideratis tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicis & mechanicis unice desideratum.

LEIBNIZ

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS nourishes the discipline of mechanics as a deductive, mathematical science in the classical tradition and promotes pure analysis, particularly in contexts of application. Its purpose is to give rapid and full publication to researches of exceptional moment, depth, and permanence.

Each memoir must meet a standard of rigor set by the best work in its field. Contributions must consist largely in original research; on occasion, an expository paper may be invited.

English, French, German, Italian, and Latin are the languages of the Archive. Authors are urged to write clearly and well, avoiding an excessively condensed or crabbed style.

Manuscripts intended for the Archive should be submitted to an appropriate member of the Editorial Board.

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS appears in numbers struck off as the material reaches the press; five numbers constitute a volume. Subscriptions may be entered through any agent. The price is DM 96.— per volume.

Notice is hereby given that for all articles published exclusive rights in all languages and countries rest with Springer-Verlag. Without express permission of Springer-Verlag, no reproduction of any kind is allowed.

For each paper 75 offprints are provided free of charge.

Finite Deformation of Elastic Membranes with Application to the Stability of an Inflated and Extended Tube

A. H. CORNELIUSSEN & R. T. SHIELD

Communicated by R. S. RIVLIN

Contents

	Page
1. Introduction	273
2. The Basic Equations of Finite Elasticity	275
3. The Thin Membrane	277
4. Small Deformation Superposed on Known Finite Deformation of a Thin Membrane	280
5. The Circular Cylindrical Membrane	282
6. Stability	288
7. Static Analysis of Stability	290
8. Stable Regions for the Mooney Material	293
9. Dynamic Analysis of Stability	296
10. Determination of the Natural Frequencies	300
11. Numerical Results	302
References	304

Abstract

A theory is formulated for the finite deformation of a thin membrane composed of homogeneous elastic material which is isotropic in its undeformed state. The theory is then extended to the case of a small deformation superposed on a known finite deformation of the membrane. As an example, small deformations of a circular cylindrical tube which has been subjected to a finite homogeneous extension and inflation are considered and the equations governing these small deformations are obtained for an incompressible material. By means of a static analysis the stability of cylindrically symmetric modes for the inflated and extended cylinder with fixed ends is determined and the results are verified by a dynamic analysis. The stability is considered in detail for a Mooney material. Methods are developed to obtain the natural frequencies for axially symmetric free vibrations of the extended and inflated cylindrical membrane. Some of the lower natural frequencies are calculated for a Mooney material and the methods are compared.

1. Introduction

The theory of the finite deformation of an elastic solid has been considered by many authors (see for example [1], [2] and [3]), and is reviewed briefly in Section 2 of this paper. The application of this theory to particular problems is difficult because of the non-linearity of the equations involved. This difficulty

has been circumvented in problems which have simple geometries by the use of semi-inverse methods, see [1] for example.

If the problem is such that one or more of the spatial variables can be eliminated, much simplification results. In problems involving thin shells, one of the spatial variables is removed if an approximate theory is developed in terms of the resultant forces and moments across a section of the shell and in terms of the deformation of the middle surface. This approach is well established for problems involving small strains (see [1] or [4]). A general approach to the exact theory of the finite deformation of shells has been given recently [5].

A further simplification is achieved if the shell is considered as a membrane. The membrane approximation assumes that the forces or stresses in the middle surface are large compared with the transverse stresses. The resulting theory involves stress resultants acting on sections normal to the middle surface and neglects bending moments and shear forces, and in the classical treatment of shells is often used to provide a particular integral from which a more exact solution can be derived. The finite deformation of a thin membrane has been discussed in [2] and several problems of this type have been solved [6].

In Section 3 of this paper, the general theory of the finite deformation of a thin membrane composed of an isotropic elastic material is re-formulated. The resulting equations are non-linear and are readily solvable only for problems with a high degree of symmetry. One means of overcoming the difficulties, which has application to certain types of finite deformations and also to the investigation of the stability and natural frequencies associated with a given finite deformation, is the theory of a small deformation superposed on a known finite deformation. The general theory of a small deformation superposed on a known finite deformation has been developed in [7]. In Section 4 the corresponding theory for thin membranes is developed.

In Section 5, the theory of Sections 3 and 4 is applied to a circular cylindrical membrane which is subjected to a finite homogeneous inflation and axial extension characterized by extension ratios λ_1 and λ_2 . The equations of motion for a small additional deformation are obtained for an incompressible material.

In the remainder of the paper, the stability and natural frequencies of the free vibrations of the circular cylindrical membrane with the finite deformation λ_1, λ_2 are considered. The validity of static methods in stability problems has been discussed by ZIEGLER [8] for linear mechanical systems with a finite number of degrees of freedom and for linear elastic systems. In many cases a static method is much easier to apply than the usual dynamic method and can be used to determine the stability of the system [8]. In Section 6 we discuss a static method for the determination of the stability of the cylindrical tube in the state of deformation λ_1, λ_2 .

According to the classical theory, the tube is unstable under external pressure. For a small internal pressure the lowest free vibration frequencies are those associated with highly non-symmetric modes. However, as the internal pressure increases, the degree of asymmetry associated with the mode of lowest frequency decreases [9]. Thus an analysis of the axially symmetric stability problem and the axially symmetric vibrations should give correct stability results and the lowest natural frequencies when the internal pressure is sufficiently large.

In Section 7 we analyse the dependence of the stability of the tube on the extension ratios λ_1 and λ_2 for symmetric modes using a static stability analysis. In Section 8 we discuss the geometry of the stable regions predicted in Section 7 for the particular case of a tube composed of Mooney material. Finally in Section 9, by considering the natural frequencies of the tube, it is verified that as far as axially symmetric modes are concerned the stable region is that predicted by the static approach of Section 7.

The actual numerical computation of the natural frequencies is laborious and in Section 10 an approximate method for calculating the frequencies is given. In Section 11 numerical results are discussed in order to appraise the adequacy of the approximate method of Section 10.

2. The Basic Equations of Finite Elasticity

We consider a homogeneous elastic body which is isotropic in its undeformed state.

At time $t=0$, the body is undeformed and the coordinates of a typical point in a fixed rectangular Cartesian coordinate system x are (x_1, x_2, x_3) . If $(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3)$ are the coordinates of this point in an arbitrary curvilinear coordinate system ϑ fixed in the body, we have

$$x_k = x_k(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3). \quad (2.1)$$

We use the convention that Latin indices take the values 1, 2 and 3 and that repeated Latin indices denote summation over the values 1, 2 and 3. If \mathbf{r} is the position vector from the origin of the system x to a typical point of the body, the covariant base vectors of the system ϑ in the undeformed body are

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta^k} = \mathbf{r}_{,k}, \quad (2.2)$$

a comma followed by k denoting differentiation with respect to ϑ^k . The element of length ds is given by

$$ds^2 = dx_k dx_k = g_{ij} d\vartheta^i d\vartheta^j,$$

where g_{ij} , the covariant components of the metric tensor of the system ϑ at $t=0$, are given by

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j. \quad (2.3)$$

The contravariant components of the metric tensor are given by

$$g^{ij} = \frac{1}{g} c^{ij}, \quad g = |g_{ij}|, \quad (2.4)$$

where c^{ij} is the cofactor of g_{ij} in the determinant $|g_{ij}|$.

At time t , the body has become deformed and the coordinates of a typical point of the body in the system x are now (X_1, X_2, X_3) . The curvilinear system ϑ moves with the body as it is deformed and we have

$$X_k = X_k(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3, t). \quad (2.5)$$

In terms of \mathbf{R} , the position vector from the origin of x to the point $(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3)$ at time t , the covariant base vectors of the system ϑ are

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{R}_{,k}. \quad (2.6)$$

The element of length dS is given by

$$dS^2 = dX_k dX_k = G_{ij} d\vartheta^i d\vartheta^j,$$

where

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad (2.7)$$

are the covariant components of the metric tensor of the system ϑ at time t . Finally, the contravariant components of the metric tensor are

$$G^{ij} = \frac{C^{ij}}{G}, \quad G = |G_{ij}|, \quad (2.8)$$

where C^{ij} is the cofactor of G_{ij} in the determinant $|G_{ij}|$.

The contravariant components of stress τ^{ij} in the system ϑ are related to the stress vector \mathbf{t}_i acting on the surface $\vartheta^i = \text{constant}$ at time t and measured per unit area of the deformed body by

$$\mathbf{t}_i = \frac{\tau^{ik}}{\sqrt{G^{ii}}} \mathbf{G}_k, \quad (2.9)$$

i not summed.

The strain-energy function W for a homogeneous isotropic elastic solid is a function of the three strain invariants I_1 , I_2 and I_3 ,

$$W = W(I_1, I_2, I_3),$$

the invariants being given by

$$\begin{aligned} I_1 &= g^{rs} G_{rs}, \\ I_2 &= g_{rs} G^{rs} I_3, \\ I_3 &= G/g. \end{aligned} \quad (2.10)$$

The stresses τ^{ij} are now given in terms of W and the metric tensors by

$$\tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi D^{ij} + P G^{ij}, \quad (2.11)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi &= 2I_3^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \\ \Psi &= 2I_3^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \\ P &= 2I_3^{\frac{1}{2}} \frac{\partial W}{\partial I_3}, \\ D^{ij} &= I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

For an incompressible material, $I_3 = 1$ and

$$W = W(I_1, I_2). \quad (2.13)$$

The stress-strain law is again (2.11) where now P is a scalar invariant function of position and time which corresponds to a hydrostatic pressure. For certain rubber-like materials a strain-energy function of the Mooney form

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (2.14)$$

where C_1 and C_2 are positive constants, gives results which check well with experiment [10]. The simplest incompressible strain-energy function is that of a neo-Hookean material,

$$W = C_1(I_1 - 3). \quad (2.15)$$

The equations of motion in the absence of body forces are

$$\tau^{ij}|_i = \rho f^j, \quad (2.16)$$

where ρ is the density of the deformed body, f^j are the components of the acceleration vector in the system ϑ , and the vertical line in $\tau^{ij}|_i$ denotes covariant differentiation in the system ϑ of the deformed body. If surface forces $\mathbf{p} = p^j \mathbf{G}_j$ act on the surface of the deformed body and if $\mathbf{n} = n_i \mathbf{G}^i$ is the unit normal to the surface, where $\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j$, the relation

$$\tau^{ij} n_i = p^j \quad (2.17)$$

must hold on the surface.

3. The Thin Membrane

Let $(\vartheta^1, \vartheta^2)$ be the coordinates of a general curvilinear coordinate system defined on a surface in space. If \mathbf{a} is the position vector from the origin of a fixed rectangular coordinate system x to a point $(\vartheta^1, \vartheta^2)$ on this surface, the base vectors on the surface are

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \vartheta^\alpha} = \mathbf{a}_{,\alpha}. \quad (3.1)$$

We use the convention that Greek indices take the values 1 and 2 and that repeated Greek indices denote summation over the values 1 and 2.

We define a unit vector $\mathbf{a}_3(\vartheta^1, \vartheta^2)$ perpendicular to the surface at each point in the direction of $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$. The distance from the point $(\vartheta^1, \vartheta^2)$ on the surface to a point on the normal to the surface at that point is denoted by ϑ^3 , and is considered positive in the direction of \mathbf{a}_3 and negative in the direction opposite to \mathbf{a}_3 . Then the position vectors \mathbf{r} defined by

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(\vartheta^1, \vartheta^2) + \vartheta^3 \mathbf{a}_3(\vartheta^1, \vartheta^2), \quad (3.2)$$

where

$$-\frac{1}{2}h(\vartheta^1, \vartheta^2) \leq \vartheta^3 \leq \frac{1}{2}h(\vartheta^1, \vartheta^2),$$

define the points of a shell of thickness h with $\vartheta^3 = 0$ defining the middle surface of the shell.

The coordinates of the convected coordinate system ϑ of Section 2 are taken to be $(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3)$.

Using equations (2.3) and (2.4), and neglecting terms in ϑ^3 for a thin shell, we obtain

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta}, & g_{\alpha 3} &= 0, & g_{33} &= 1, \\ g &= a, \\ g^{\alpha\beta} &= a^{\alpha\beta}, & g^{\alpha 3} &= 0, & g^{33} &= 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

where $a_{\alpha\beta}$ and $a^{\alpha\beta}$ are the components of the surface metric tensor,

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a = |\mathbf{a}_\alpha|, \quad (3.4)$$

and $a^{\alpha\beta}$ is the cofactor of $a_{\alpha\beta}$ divided by a .

At time t the middle surface has a new position defined by the position vectors $\mathbf{A}(\vartheta^1, \vartheta^2)$. The covariant base vectors of the deformed middle surface are \mathbf{A}_α ,

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_{,\alpha}. \quad (3.5)$$

At each point of the middle surface, a unit vector \mathbf{A}_3 is defined, perpendicular to the surface at that point and having the direction of $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$. It should be noted that the unit vector \mathbf{A}_3 is not in general the usual covariant base vector associated with the ϑ^3 coordinate curve (see also the footnote on p. 279).

If the principal radii of curvature of the deformed middle surface are large in comparison with the shell thickness h and if h varies sufficiently slowly with ϑ^1 and ϑ^2 , it is reasonable to make the membrane assumption that the shearing stress in the direction of the normal to the middle surface in planes perpendicular to the middle surface is small enough to be neglected in comparison with the remaining stresses. This means that the direction defined by \mathbf{A}_3 is a principal direction of stress. From isotropy, this direction is also a principal direction of strain. Consider linear elements of material lying along the principal directions of strain at a point $(\vartheta^1, \vartheta^2)$ on the middle surface. Two of these elements must lie in the tangent plane to the deformed middle surface at $(\vartheta^1, \vartheta^2)$. Since elements along principal directions in the deformed state were originally perpendicular in the undeformed state, the element along \mathbf{A}_3 must consist of points which were originally along $\mathbf{a}_3(\vartheta^1, \vartheta^2)$. From this and the assumption that the shell is thin, the position vector to a point in the deformed membrane is given by

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\vartheta^1, \vartheta^2) + \lambda_3(\vartheta^1, \vartheta^2) \vartheta^3 \mathbf{A}_3(\vartheta^1, \vartheta^2), \quad (3.6)$$

where λ_3 is positive and is the extension ratio in the direction of the normal to the middle surface. The various components of the metric tensor are now

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta}, & G_{\alpha 3} &= 0, & G_{33} &= \lambda_3^2, \\ G &= \lambda_3^2 A, \\ G^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta}, & G^{\alpha 3} &= 0, & G^{33} &= \frac{1}{\lambda_3^2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

where $A_{\alpha\beta}$ and $A^{\alpha\beta}$ are the components of the surface metric tensor at time t ,

$$A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta, \quad A = |\mathbf{A}_{\alpha\beta}|, \quad (3.8)$$

and where $A^{\alpha\beta}$ is the cofactor of $A_{\alpha\beta}$ divided by A .

Let the physical stress resultant \mathbf{n}_α be the force acting on the surface $\vartheta^\alpha = \text{constant}$ in the deformed membrane, per unit length of the middle surface at a given point of the middle surface. For a thin shell,

$$\mathbf{n}_\alpha = \lambda_3 h \mathbf{t}_\alpha,$$

and defining the contravariant components of the physical stress resultant $n^{\alpha\beta}$ by

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{A^{\alpha\alpha}}} n^{\alpha\beta} \mathbf{A}_\beta,$$

α not summed, we have

$$n^{\alpha\beta} = \lambda_3 h \tau^{\alpha\beta}. \quad (3.9)$$

We then obtain

$$n^{\alpha\beta} = \lambda_3 h [\Phi a^{\alpha\beta} + \Psi D^{\alpha\beta} + P A^{\alpha\beta}], \quad (3.10)$$

where

$$D^{\alpha\beta} = \lambda_3^2 a^{\alpha\beta} + \{a^{\alpha\beta} a^{\mu\nu} - a^{\alpha\mu} a^{\beta\nu}\} A_{\mu\nu}.$$

In terms of surface quantities and λ_3 , the strain invariants are

$$\begin{aligned} I_1 &= a^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} + \lambda_3^2, \\ I_3 &= \lambda_3^2 A/a, \\ I_2 &= I_3 \left[a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + \frac{1}{\lambda_3^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

We now make the further assumption that the normal components of the tractions applied to the surfaces of the membrane are small compared to the stresses acting on the surfaces $\vartheta^\alpha = \text{constant}$. This means that we may take

$$\tau^{33} = 0. \quad (3.12)$$

Equation (3.12) then gives a relation for λ_3 in terms of surface quantities, namely

$$\Phi + \Psi D^{33} + \frac{1}{\lambda_3^2} P = 0, \quad (3.13)$$

where

$$D^{33} = a^{\mu\nu} A_{\mu\nu}.$$

Using (3.13), (3.11) and (3.10), we can express $n^{\alpha\beta}$ in terms of surface quantities and derivatives of the strain energy function.

For an incompressible material $I_3 = 1$ implies

$$\lambda_3 = (a/A)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.14)$$

We thus find that

$$\begin{aligned} I_1 &= a^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} + a/A, \\ I_2 &= a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + A/a. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Equation (3.12) then determines the pressure function P . The stress resultants for an incompressible material are now given by

$$n^{\alpha\beta} = (a/A^3)^{\frac{1}{2}} h [\{A a^{\alpha\beta} - a A^{\alpha\beta}\} \Phi + \{A D^{\alpha\beta} - a A^{\alpha\beta} D^{33}\} \Psi], \quad (3.16)$$

where

$$D^{\alpha\beta} = \frac{a}{A} a^{\alpha\beta} + \{a^{\alpha\beta} a^{\mu\nu} - a^{\alpha\mu} a^{\beta\nu}\} A_{\mu\nu},$$

and

$$D^{33} = a^{\mu\nu} A_{\mu\nu}.$$

Consider an element of the deformed membrane at time t bounded by the surfaces $\vartheta^1 = \text{constant}$, $\vartheta^1 + d\vartheta^1 = \text{constant}$, $\vartheta^2 = \text{constant}$, $\vartheta^2 + d\vartheta^2 = \text{constant}$. Let \mathbf{p} be the resultant force acting on the lateral surfaces of the element per unit area of the deformed middle surface. We can write

$$\mathbf{p} = p^j \mathbf{A}_j. \quad (3.17)^*$$

If we also write

$$\ddot{\mathbf{A}} = f^k \mathbf{A}_k, \quad (3.18)^*$$

* Note that p^j and f^k are not the contravariant components of \mathbf{p} and $\ddot{\mathbf{A}}$ in the system ϑ .

where a dot denotes differentiation with respect to time, the equations of motion for a thin shell become $[I]$,

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}|_{\alpha} + p^{\beta} &= h(a/A)^{\frac{1}{2}} \varrho_0 f^{\beta}, \\ n^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + p^3 &= h(a/A)^{\frac{1}{2}} \varrho_0 f^3, \end{aligned} \quad (3.19)$$

where ϱ_0 is the mass per unit volume of the undeformed membrane. In equations (3.19),

$$B_{\alpha\beta} = A^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \quad (3.20)$$

and

$$n^{\alpha\beta}|_{\alpha} = \frac{\partial n^{\alpha\beta}}{\partial \vartheta^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} n^{\lambda\beta} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta} n^{\alpha\lambda}, \quad (3.21)$$

with

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} A^{\alpha\lambda} [A_{\lambda\beta,\gamma} + A_{\lambda\gamma,\beta} - A_{\beta\gamma,\lambda}].$$

In a given problem, we would usually choose the curvilinear coordinate system on the middle surface with reference to the initial geometry of the middle surface. The components $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$, and a are then known quantities. The rectangular components $X_k(\vartheta^1, \vartheta^2)$ of the position vector \mathbf{A} or a geometrically suitable combination of the X_k 's may be taken as unknowns. If we write

$$\mathbf{A}_k = A_k^i \mathbf{e}_i, \quad (3.22)$$

where \mathbf{e}_i is the unit vector in the x_i direction of the rectangular coordinate system x , and note that

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} [\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2],$$

the quantities A_k^i are readily expressible in terms of $X_k(\vartheta^1, \vartheta^2)$. We can then express the acceleration components f^k in terms of X_k and their derivatives by solving the equations

$$\ddot{X}_i = f^k A_k^i. \quad (3.23)$$

Equations (3.19) are thus three equations for the determination of the three coordinates X_k in conjunction with the appropriate conditions at the boundary of the membrane.

4. Small Deformation Superposed on Known Finite Deformation of a Thin Membrane

For a thin membrane, we consider a state of deformation which at each instant of time differs only slightly from that of a known finite deformation. At time t , the vector from the origin of the rectangular coordinate system x to a point on the deformed middle surface is written as $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{A}'$ where \mathbf{A} is the position vector of the deformed middle surface for the known finite deformation and ε is a constant which is considered small in the sense that second and higher powers of ε may be neglected in comparison with ε . It is convenient to represent \mathbf{A}' as

$$\mathbf{A}' = w_k \mathbf{A}^k, \quad (4.1)$$

where $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_3(w_k)$ are not the covariant components of \mathbf{A}' . The covariant components of the deformed surface metric tensor are now $A_{\alpha\beta} + \varepsilon A'_{\alpha\beta}$ and in terms of w_k ,

$$A'_{\alpha\beta} = w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha} - 2I_{\alpha\beta}^{\gamma} w_{\gamma} - 2B_{\alpha\beta} w_3. \quad (4.2)$$

The contravariant components of the surface tensor and the determinant of $A_{\alpha\beta} + \varepsilon A'_{\alpha\beta}$ are now $A^{\alpha\beta} + \varepsilon A'^{\alpha\beta}$ and $A + \varepsilon A'$ respectively. We find that

$$\begin{aligned} A'^{11} &= A^{-1} [A'_{22} - A' A_{22}/A], \\ A'^{12} &= A^{-1} [A' A_{12}/A - A'_{12}], \\ A'^{22} &= A^{-1} [A'_{11} - A' A_{11}/A], \end{aligned} \quad (4.3)$$

and

$$A' = A'_{11} A_{22} + A_{11} A'_{22} - 2A_{12} A'_{12}.$$

The strain invariants are $I_k + \varepsilon I'_k$, where

$$\begin{aligned} I'_1 &= a^{\alpha\beta} A'_{\alpha\beta} + 2\lambda_3 \lambda'_3, \\ I'_3 &= (\lambda_3/a) [2\lambda'_3 A + \lambda_3 A'], \\ I'_2 &= I_3 \left\{ a_{\alpha\beta} A'^{\alpha\beta} - 2 \frac{\lambda'_3}{\lambda_3} \right\} + I_3 \left\{ a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + \frac{1}{\lambda_3^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

the extension ratio in the direction perpendicular to the middle surface being $\lambda_3 + \varepsilon \lambda'_3$. Writing the stresses as $\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}$,

$$\tau'^{\alpha\beta} = \Phi' a^{\alpha\beta} + \Psi' D^{\alpha\beta} + P' A^{\alpha\beta} + \Psi D'^{\alpha\beta} + P A'^{\alpha\beta}, \quad (4.5)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi' &= 2I_3^{-\frac{1}{2}} [W_{11} I'_1 + W_{12} I'_2 + W_{13} I'_3] - \frac{\Phi}{2I_3} I'_3, \\ \Psi' &= 2I_3^{-\frac{1}{2}} [W_{12} I'_1 + W_{22} I'_2 + W_{23} I'_3] - \frac{\Psi}{2I_3} I'_3, \\ P' &= 2I_3^{\frac{1}{2}} [W_{13} I'_1 + W_{23} I'_2 + W_{33} I'_3] + \frac{P}{2I_3} I'_3, \end{aligned} \quad (4.6)$$

with the notation

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j} (I_1, I_2, I_3).$$

Also,

$$D'^{\alpha\beta} = 2\lambda_3 \lambda'_3 a^{\alpha\beta} + \{a^{\alpha\beta} a^{\mu\nu} - a^{\alpha\mu} a^{\beta\nu}\} A'_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

The equation $\tau^{33} + \varepsilon \tau'^{33} = 0$ gives the following relation for λ'_3 ,

$$\Phi' + a^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \Psi' + \frac{1}{\lambda_3^2} P' + a^{\alpha\beta} A'_{\alpha\beta} \Psi - \frac{2\lambda'_3}{\lambda_3^3} P = 0. \quad (4.8)$$

The contravariant components of the stress resultants are $n^{\alpha\beta} + \varepsilon n'^{\alpha\beta}$, where

$$n'^{\alpha\beta} = h(a/A)^{\frac{1}{2}} \left[\tau'^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{A'}{A} \tau^{\alpha\beta} \right]. \quad (4.9)$$

For an incompressible material,

$$\lambda'_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{A^3} \right)^{\frac{1}{2}} A'. \quad (4.10)$$

In this case, without knowing the explicit form of the strain-energy function, we can eliminate λ'_3 and P' to obtain

$$\begin{aligned} \tau'^{\alpha\beta} = & \Phi' \left[a^{\alpha\beta} - \frac{a}{A} A^{\alpha\beta} \right] + \Psi' \left[D^{\alpha\beta} - \frac{a}{A} A^{\alpha\beta} a^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \right] + \\ & + \frac{a}{A} [\Phi + a^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \Psi] \left[\frac{A'}{A} A^{\alpha\beta} - A'^{\alpha\beta} \right] + \Psi' \left[D'^{\alpha\beta} - \frac{a}{A} A^{\alpha\beta} a^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi_{I_1} I'_1 + \Phi_{I_2} I'_2, \\ \Psi' &= \Psi_{I_1} I'_1 + \Psi_{I_2} I'_2, \quad \Phi_{I_\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial I_\alpha} (I_1, I_2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

I'_1 and I'_2 are now defined by (4.4) with λ_3 and λ'_3 given by (3.14) and (4.10).

The force vector acting on the lateral surfaces of the membrane is now $(p^k + \varepsilon p'^k) (\mathbf{A}_k + \varepsilon \mathbf{A}'_k)$ and the acceleration vector is $(j^k + \varepsilon j'^k) (\mathbf{A}_k + \varepsilon \mathbf{A}'_k)$, where $\mathbf{A}'_\alpha = \mathbf{A}'_{,\alpha}$. We find that the equations of motion for the small additional deformation are

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'^{\alpha\beta}}{\partial \theta^\alpha} + I_{\alpha\lambda}^{\alpha} n'^{\lambda\beta} + I_{\alpha\lambda}^{\beta} n'^{\alpha\lambda} + I_{\alpha\lambda}^{\alpha} n^{\lambda\beta} + I_{\alpha\lambda}^{\beta} n^{\alpha\lambda} + p'^\beta \\ = h \varrho_0 \left(\frac{a}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left[f'^\beta - \frac{1}{2} \frac{A'}{A} f^\beta \right], \\ n^{\alpha\beta} B'_{\alpha\beta} + n'^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + p'^3 = h \varrho_0 \left(\frac{a}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left[f'^3 - \frac{1}{2} \frac{A'}{A} f^3 \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

where

$$\begin{aligned} I_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2} A^{\alpha\lambda} [A'_{\lambda\beta,\gamma} + A'_{\lambda\gamma,\beta} - A'_{\beta\gamma,\lambda}] + \frac{1}{2} A'^{\alpha\lambda} [A_{\lambda\beta,\gamma} + A_{\lambda\gamma,\beta} - A_{\beta\gamma,\lambda}], \\ B'_{\alpha\beta} &= \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} [\mathbf{A}'_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) + \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}'_2 + \mathbf{A}'_1 \times \mathbf{A}_2)] - \frac{A'}{2A} B_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Equation (3.23) becomes

$$\ddot{X}_i + \varepsilon \ddot{X}'_i = (j^k + \varepsilon j'^k) (A^i_k + \varepsilon A'^i_k),$$

and at once we have

$$\ddot{X}'_i = f'^k A^i_k + f^k A'^i_k, \quad (4.15)$$

a relation to determine f'^k . We can easily obtain $A_3'^i$ using the relation

$$\mathbf{A}'_3 = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \{ \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}'_2 + \mathbf{A}'_1 \times \mathbf{A}_2 \} - \frac{A'}{2A} \mathbf{A}_3. \quad (4.16)$$

Expressing X'_i in terms of w_k , we obtain from (4.13) three equations for the determination of the three components w_k .

5. The Circular Cylindrical Membrane

We now consider a thin membrane which in the undeformed state has the shape of a circular cylindrical tube of length l of constant thickness. Let the radius of the middle surface be c and the thickness of the tube be h . We will choose the right-handed rectangular Cartesian coordinate system x so that the

axes 1 and 2 lie in the plane of one of the ends of the tube while the third axis lies along the axis of the tube in the direction of the other end of the tube, Fig. 1. The convected coordinates of the middle surface are chosen in the following way. Let ϑ^1 be arc length measured from the plane $x_2=0$ along the line formed by the intersection of the middle surface and the plane $x_3=\text{constant}$. ϑ^2 is the distance from the plane $x_3=0$ measured in the direction of the x_3 axis.

The position vector \mathbf{a} to the undeformed middle surface is then

$$\mathbf{a} = c \cos \frac{\vartheta^1}{c} \mathbf{e}_1 + c \sin \frac{\vartheta^1}{c} \mathbf{e}_2 + \vartheta^2 \mathbf{e}_3, \quad (5.1)$$

from which it follows that

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1, \\ a^{11} = 1, \quad a^{12} = 0, \quad a^{22} = 1, \quad (5.2)$$

$$a = 1.$$

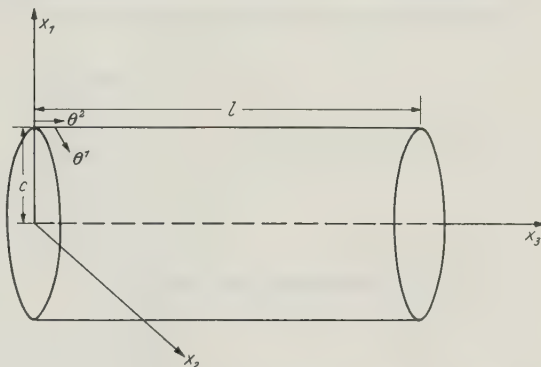


Fig. 1. Coordinate systems for the circular cylindrical membrane

We consider the quasistatic homogeneous finite deformation of the tube by a simultaneous inflation and extension. The radius of the middle surface becomes $\lambda_1 c$, the length $\lambda_2 l$, and a point originally with axial coordinate x_3 now has coordinate $X_3 = \lambda_2 x_3$, λ_1 and λ_2 being positive constants. We may write the position vector to a point on the deformed middle surface as

$$\mathbf{A} = \lambda_1 c \cos \frac{\vartheta^1}{c} \mathbf{e}_1 + \lambda_1 c \sin \frac{\vartheta^1}{c} \mathbf{e}_2 + \lambda_2 \vartheta^2 \mathbf{e}_3. \quad (5.3)$$

It follows directly that

$$A_{11} = \lambda_1^2, \quad A_{12} = 0, \quad A_{22} = \lambda_1^2, \\ A^{11} = \frac{1}{\lambda_1^2}, \quad A^{12} = 0, \quad A^{22} = \frac{1}{\lambda_2^2}, \quad (5.4) \\ A = \lambda_1^2 \lambda_2^2.$$

For the strain invariants I_k , we find that

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2, \quad (5.5) \\ I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2,$$

where λ_3 is given in terms of λ_1 and λ_2 by

$$\Phi + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Psi + \frac{1}{\lambda_3^2} P = 0. \quad (5.6)$$

The stress resultants are then

$$n^{11} = \lambda_3 h \left[\Phi + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \Psi + \frac{1}{\lambda_1^2} P \right], \\ n^{12} = 0, \\ n^{22} = \lambda_3 h \left[\Phi + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \Psi + \frac{1}{\lambda_2^2} P \right].$$

Also we have

$$\begin{aligned} I_{\beta\gamma}^{\alpha} &= 0, \\ B_{11} &= -\frac{\lambda_1}{c}, \quad B_{12} = B_{22} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

The forces necessary to support this deformation are a normal pressure on the lateral surfaces of the tube given by

$$p^3 = \frac{\lambda_1 \lambda_3 h}{c} \left[\Phi + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \Psi + \frac{1}{\lambda_1^2} P \right], \quad (5.8)$$

and an axial force T per unit length on the ends of the tube,

$$T = \lambda_2^2 \lambda_3 h \left[\Phi + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \Psi + \frac{1}{\lambda_2^2} P \right]. \quad (5.9)$$

For an incompressible material,

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

The stress resultants become

$$\begin{aligned} n^{11} &= \frac{h}{\lambda_1^5 \lambda_2^3} [\lambda_1^4 \lambda_2^2 - 1] [\Phi + \lambda_2^2 \Psi], \\ n^{12} &= 0, \\ n^{22} &= \frac{h}{\lambda_1^3 \lambda_2^5} [\lambda_1^2 \lambda_2^4 - 1] [\Phi + \lambda_1^2 \Psi]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

The forces necessary to support the deformation for incompressible materials are given by

$$p^3 = \frac{h}{c \lambda_1^4 \lambda_2^3} [\lambda_1^4 \lambda_2^2 - 1] [\Phi + \lambda_2^2 \Psi], \quad (5.12)$$

$$T = \frac{h}{\lambda_1^3 \lambda_2^5} [\lambda_1^2 \lambda_2^4 - 1] [\Phi + \lambda_1^2 \Psi]. \quad (5.13)$$

We will now give the steps leading to the equations of motion for a general small deformation superposed on the above finite deformation. It is convenient to express the components w_k , defined earlier by $\mathbf{A}' = w_k \mathbf{A}^k$, in terms of new dependent variables u, v , and w . If a cylindrical polar coordinate system is defined in the usual way with respect to the system $x, \varepsilon u, \varepsilon v$, and εw are the physical components of displacement (in the polar system) of the small additional deformation, with u radial, v azimuthal, and w longitudinal. We find that

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_1 v, \\ w_2 &= \lambda_2 w, \\ w_3 &= u. \end{aligned} \quad (5.14)$$

The perturbed components of the deformed metric tensor are from equations (4.2), (4.3), and (5.14),

$$\begin{aligned}
 A'_{11} &= 2\lambda_1 \left(\frac{u}{c} + v_{,1} \right), & A'_{12} &= \lambda_1 v_{,2} + \lambda_2 w_{,1}, \\
 A'_{22} &= 2\lambda_2 w_{,2}, \\
 A'^{11} &= -\frac{2}{\lambda_1^3} \left[\frac{u}{c} + v_{,1} \right], & A'^{12} &= -\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} [\lambda_1 v_{,2} + \lambda_2 w_{,1}], \\
 A'^{22} &= -\frac{2}{\lambda_2^3} w_{,2},
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

and

$$A' = 2\lambda_1 \lambda_2 \left[\lambda_2 \frac{u}{c} + \lambda_2 v_{,1} + \lambda_1 w_{,2} \right],$$

where $v_{,1}$ denotes $\partial v / \partial \vartheta^1$, etc. For I'_k , we find that

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= 2\lambda_3 \lambda'_3 + 2\lambda_1 \left[\frac{u}{c} + v_{,1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,2} \right], \\
 I'_3 &= 2\lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 \left[\lambda_1 \lambda'_3 + \lambda_3 \left\{ \frac{u}{c} + v_{,1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} w_{,2} \right\} \right], \\
 I'_2 &= \frac{2\lambda_1}{c} (\lambda_2^3 + \lambda_3^2) u + 2\lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) w_{,2} \\
 &\quad + 2\lambda_1 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) v_{,1} + 2\lambda_3 \lambda'_3 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2),
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

where we may evaluate λ'_3 in terms of u, v, w , and known quantities by using (4.6), (4.8), (5.2), (5.4), (5.6), (5.15), and (5.16). We also find that

$$\begin{aligned}
 D^{11} &= \lambda_2^2 + \lambda_3^2, & D^{12} &= 0, & D^{22} &= \lambda_1^2 + \lambda_3^2, \\
 D'^{11} &= 2\lambda_3 \lambda'_3 + 2\lambda_2 w_{,2}, \\
 D'^{12} &= -\lambda_1 v_{,2} - \lambda_2 w_{,1}, \\
 D'^{22} &= 2\lambda_3 \lambda'_3 + 2\lambda_1 \left(\frac{u}{c} + v_{,1} \right).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

From (4.5) and (4.9), we can now calculate the components $n'^{\alpha\beta}$. From equations (4.14),

$$\begin{aligned}
 \Gamma'^{11}_{11} &= \frac{1}{\lambda_1} \left[\frac{u_{,1}}{c} + v_{,11} \right], & \Gamma'^{11}_{12} &= \frac{1}{\lambda_1} \left[\frac{u_{,2}}{c} + v_{,12} \right], \\
 \Gamma'^{21}_{22} &= \frac{1}{\lambda_1} v_{,22}, & \Gamma'^{21}_{11} &= \frac{1}{\lambda_2} \left[w_{,11} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{u_{,2}}{c} \right], \\
 \Gamma'^{22}_{12} &= \frac{1}{\lambda_2} w_{,12}, & \Gamma'^{22}_{22} &= \frac{1}{\lambda_2} w_{,22}, \\
 B'_{11} &= \frac{1}{c} \left[c u_{,11} - 2v_{,1} - \frac{u}{c} \right], & B'_{12} &= \frac{1}{c} [c u_{,12} - v_{,2}], \\
 B'_{22} &= u_{,22}.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Finally, from the definition of the finite deformation and from equation (4.15), we obtain

$$f^k = 0, \quad f'^1 = \frac{1}{\lambda_1} \ddot{v}, \quad f'^2 = \frac{1}{\lambda_2} \ddot{w}, \quad f'^3 = \ddot{u}. \quad (5.19)$$

Substituting into equations (4.13), we obtain the equations of motion for u , v , and w .

For an incompressible material, we find that

$$\lambda'_3 = - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left[\lambda_2 \left(\frac{u}{c} + v_{,1} \right) + \lambda_1 w_{,2} \right]. \quad (5.20)$$

The quantities I'_a can now be written

$$\begin{aligned} I'_1 &= 2 \frac{\lambda_1^4 \lambda_2^2 - 1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \left[\frac{u}{c} + v_{,1} \right] + 2 \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^4 - 1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3} w_{,2}, \\ I'_2 &= 2 \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1}{\lambda_1^3} \left[\frac{u}{c} + v_{,1} \right] + 2 \frac{\lambda_1^4 \lambda_2^4 - 1}{\lambda_2^3} w_{,2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

The components $n'^{\alpha\beta}$ become

$$\begin{aligned} n'^{11} &= \frac{h}{\lambda_1^6 \lambda_2^3} [(5 - \lambda_1^4 \lambda_2^2) (\Phi + \lambda_2^2 \Psi) + 2K_2] \left[\frac{u}{c} + v_{,1} \right] + \\ &\quad + \frac{h}{\lambda_1^5 \lambda_2^4} [(3 - \lambda_1^4 \lambda_2^2) \Phi + (\lambda_1^4 \lambda_2^2 + 1) \lambda_2^2 \Psi + 2H] w_{,2}, \\ n'^{12} &= \frac{h}{\lambda_1^5 \lambda_2^2} [\Phi + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^4 \lambda_2^4) \Psi] [\lambda_1 v_{,2} + \lambda_2 w_{,1}], \\ n'^{22} &= \frac{h}{\lambda_1^3 \lambda_2^6} [(5 - \lambda_1^2 \lambda_2^4) (\Phi + \lambda_1^2 \Psi) + 2K_1] w_{,2} + \\ &\quad + \frac{h}{\lambda_1^4 \lambda_2^5} [(3 - \lambda_1^2 \lambda_2^4) \Phi + (\lambda_1^2 \lambda_2^4 + 1) \lambda_1^2 \Psi + 2H] \left[\frac{u}{c} + v_{,1} \right], \end{aligned} \quad (5.22)$$

where

$$\begin{aligned} H &= \frac{[\lambda_1^2 \lambda_2^4 - 1] [\lambda_1^4 \lambda_2^2 - 1]}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} [\Phi_{I_1} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Phi_{I_2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \Psi_{I_2}], \\ K_1 &= \frac{[\lambda_1^2 \lambda_2^4 - 1]^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} [\Phi_{I_1} + 2\lambda_1^2 \Phi_{I_2} + \lambda_1^4 \Psi_{I_2}], \\ K_2 &= \frac{[\lambda_1^4 \lambda_2^2 - 1]^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} [\Phi_{I_1} + 2\lambda_2^2 \Phi_{I_2} + \lambda_2^4 \Psi_{I_2}]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

After some reduction, the equations for small vibrations in the case of an incompressible material are found to be

$$\begin{aligned} \beta_1 w_{,22} + \frac{\beta_2}{c} u_{,2} + \beta_7 v_{,12} + \beta_8 w_{,11} + \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^2}{h} p'^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^4 \varrho \ddot{w}, \\ \beta_3 u_{,22} - \frac{\beta_4}{c^2} u - \frac{\beta_2}{c} w_{,2} - \frac{\beta_5}{c} v_{,1} + \beta_6 u_{,11} + \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^5}{h} p'^3 = \lambda_1^2 \lambda_2^4 \varrho \ddot{u}, \\ \beta_7 w_{,12} + \beta_5 \left(\frac{u_{,1}}{c} + v_{,11} \right) + \beta_8 v_{,22} + \frac{\lambda_1^4 \lambda_2^5}{h} p'^1 = \lambda_1^2 \lambda_2^4 \varrho \ddot{v}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

where

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= (3 + \lambda_1^2 \lambda_2^4) (\Phi + \lambda_1^2 \Psi) + 2K_1, \\
 \beta_2 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} [(3 - \lambda_1^4 \lambda_2^2) \Phi + (\lambda_1^4 \lambda_2^2 + 1) \lambda_2^2 \Psi + 2H], \\
 \beta_3 &= (\lambda_1^2 \lambda_2^4 - 1) (\Phi + \lambda_1^2 \Psi), \\
 \beta_4 &= \frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1^2} [2(\Phi + \lambda_2^2 \Psi) + K_2], \\
 \beta_5 &= \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} [(3 + \lambda_1^4 \lambda_2^2) (\Phi + \lambda_2^2 \Psi) + 2K_2], \\
 \beta_6 &= \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} (\lambda_1^4 \lambda_2^2 - 1) (\Phi + \lambda_2^2 \Psi), \\
 \beta_7 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} [3\Phi + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^4 \lambda_2^4) \Psi + 2H], \\
 \beta_8 &= \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \lambda_2^2 \Phi + \Psi),
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

and where $\varrho = \varrho_0$ is the mass per unit volume of the material.

The constants β_1 to β_8 can be written in terms of the pressure p^3 and the axial force T of the finite deformation as follows:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^4}{h} \frac{\partial T}{\partial \lambda_2}, \\
 \beta_2 &= \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^5 c}{h} \frac{\partial p^3}{\partial \lambda_2}, \\
 \beta_3 &= \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^3}{h} T, \\
 \beta_4 &= \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^5 c}{h} \frac{\partial p^3}{\partial \lambda_1}, \\
 \beta_5 &= \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^5 c}{h} \frac{\partial (\lambda_1 p^3)}{\partial \lambda_1}, \\
 \beta_6 &= \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^5 c}{h} p^3, \\
 \beta_7 &= \frac{\lambda_1^4 \lambda_2^4}{h (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (T - \lambda_1 c p^3) + \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^5 c}{h} \frac{\partial p^3}{\partial \lambda_2}, \\
 \beta_8 &= \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^5}{h (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (T - \lambda_1 c p^3).
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

From equations (5.26), we see that equations (5.24) could have been derived directly by considering the motion of an element of the shell.

Note that β_1 , β_4 , and β_8 are always positive for a Mooney material, defined by equations (2.14). We will assume in the following that they are positive for the incompressible material considered,

$$\beta_1, \beta_4, \beta_8 > 0. \tag{5.27}$$

6. Stability

Consider a body in a known (static) state of finite deformation. If we apply external forces to produce an additional small deformation (subject to certain boundary constraints), the body will in general vibrate about the position of the known finite deformation upon removal of the external forces. If the resulting motion of the body remains bounded for all time and for every choice of the disturbing forces, the initial state of finite deformation is said to be stable for the particular constraints.

Writing the displacement vector of the vibration at time t as $\varepsilon \mathbf{R}' = \varepsilon w_i \mathbf{G}^i$, we may obtain the three free vibration equations for the components w_i by using the theory of a small deformation superposed on a known finite deformation [7]. The boundary conditions on these equations are determined by the constraints and the initial conditions are arbitrary within the class of initial conditions possible for these constraints.

Writing

$$w_r = W_r(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3) e^{i\omega t}$$

and noting that the equations for the components w_r contain only second order time derivatives, we find that ω^2 may assume only a certain sequence of values $\omega_{(n)}^2$, $n=1, 2, 3, \dots$, which depend on the particular finite deformation and on the form of the constraints. If all the values $\omega_{(n)}^2$ are positive, the finite deformation is stable for the given constraints but if any of the values $\omega_{(n)}^2$ is zero, negative, or complex, the deformation is unstable.

A body is said to be statically stable for a given finite deformation and certain constraints if no non-trivial equilibrium configurations exist neighboring to the finite deformation and satisfying the constraints; it is statically unstable if such configurations do occur.

Any state of a body which is statically unstable is unstable since there will then exist an integer m such that $\omega_{(m)}^2 = 0$. On the other hand, a statically stable state may well be unstable.

The concept of static instability is valuable since it frequently enables us to discuss the stability of a system without investigating the reality and sign of the values $\omega_{(n)}^2$. ZIEGLER [8] has shown that for a linear, non-dissipative, non-gyroscopic system with a finite number of degrees of freedom, the stability can be determined by a study of the non-trivial equilibrium configurations (latent instabilities) of a system. An example is the Euler column with one end fixed. A static stability analysis gives the well-known result that latent instabilities occur for a sequence of axial loads $L_1 < L_2 < L_3 \dots$. An analysis of the vibrations of the column with an axial load shows that the column is stable if the axial load L is less than L_1 and unstable for all larger loads.

We now consider the stability of the circular cylindrical membrane of Section 5, composed of incompressible material, for the finite deformation consisting of a homogeneous inflation and extension defined by λ_1 and λ_2 and for the constraint of fixed ends. Setting

$$\begin{aligned} u &= U(\vartheta^1, \vartheta^2) e^{i\omega t}, \\ v &= V(\vartheta^1, \vartheta^2) e^{i\omega t}, \\ w &= W(\vartheta^1, \vartheta^2) e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

the equations for small vibrations are from equations (5.24),

$$\begin{aligned}\beta_1 W_{,22} + \frac{\beta_2}{c} U_{,2} + \beta_7 V_{,12} + \beta_8 W_{,11} &= -v^2 W, \\ \beta_3 U_{,22} - \frac{\beta_4}{c^2} U - \frac{\beta_2}{c} W_{,2} - \frac{\beta_5}{c} V_{,1} + \beta_6 U_{,11} &= -v^2 U, \\ \beta_7 W_{,12} + \beta_5 \left(\frac{U_{,1}}{c} + V_{,11} \right) + \beta_8 V_{,22} &= -v^2 V,\end{aligned}\quad (6.2)$$

where

$$v^2 = \varrho \lambda_1^2 \lambda_2^4 \omega^2. \quad (6.3)$$

The boundary conditions are

$$U = V = W = 0 \quad \text{at} \quad \vartheta^2 = 0, l. \quad (6.4)$$

Solving (6.2) with the boundary conditions (6.4), we obtain a sequence of values $v_{(n)}^2$ that v^2 may assume, and corresponding eigenfunctions $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, and $W^{(n)}$. Defining Q as

$$Q = (v_{(m)}^2 - v_{(n)}^2) (U^{(m)} U^{(n)} + V^{(m)} V^{(n)} + W^{(m)} W^{(n)}),$$

we find from equations (6.2) that

$$\begin{aligned}Q &= \beta_1 \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} \left\{ W^{(m)} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \vartheta^2} - W^{(n)} \frac{\partial W^{(m)}}{\partial \vartheta^2} \right\} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} \left\{ U^{(m)} \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \vartheta^2} - U^{(n)} \frac{\partial U^{(m)}}{\partial \vartheta^2} \right\} + \\ &+ \beta_5 \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} \left\{ V^{(m)} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \vartheta^1} - V^{(n)} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial \vartheta^1} \right\} + \beta_8 \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} \left\{ V^{(m)} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \vartheta^2} - V^{(n)} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial \vartheta^2} \right\} + \\ &+ \frac{\beta_2}{c} \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} \left\{ U^{(n)} W^{(m)} - U^{(m)} W^{(n)} \right\} + \beta_6 \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} \left\{ U^{(m)} \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \vartheta^1} - U^{(n)} \frac{\partial U^{(m)}}{\partial \vartheta^1} \right\} + \\ &+ \beta_8 \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} \left\{ W^{(m)} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \vartheta^1} - W^{(n)} \frac{\partial W^{(m)}}{\partial \vartheta^1} \right\} + \frac{\beta_5}{c} \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} \left\{ V^{(m)} U^{(n)} - V^{(n)} U^{(m)} \right\} + \\ &+ \beta_7 \frac{\partial}{\partial \vartheta^2} \left\{ V^{(m)} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \vartheta^1} + W^{(m)} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \vartheta^1} \right\} - \beta_7 \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} \left\{ V^{(n)} \frac{\partial W^{(m)}}{\partial \vartheta^2} + W^{(n)} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial \vartheta^2} \right\}.\end{aligned}$$

Integrating Q over the (deformed) middle surface of the membrane, using (6.4) and the fact that the eigenfunctions $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $W^{(n)}$ are periodic in ϑ^1 , we have

$$\int_0^l \int_0^{2\pi c} Q d\vartheta^1 d\vartheta^2 = 0.$$

That is,

$$0 = (v_{(m)}^2 - v_{(n)}^2) \int_0^l \int_0^{2\pi c} [U^{(m)} U^{(n)} + V^{(m)} V^{(n)} + W^{(m)} W^{(n)}] d\vartheta^1 d\vartheta^2.$$

Since the coefficients of equations (6.2) are real, we know that if $v_{(m)}^2$, $U^{(m)}$, $V^{(m)}$, $W^{(m)}$ is a solution to equations (6.2) under the conditions (6.4), then $\bar{v}_{(m)}^2$, $\bar{U}^{(m)}$, $\bar{V}^{(m)}$, $\bar{W}^{(m)}$ is also a solution, a bar denoting the complex conjugate. Hence,

$$0 = (v_{(m)}^2 - \bar{v}_{(m)}^2) \int_0^l \int_0^{2\pi c} [|U^{(m)}|^2 + |V^{(m)}|^2 + |W^{(m)}|^2] d\vartheta^1 d\vartheta^2.$$

Since the integrand is non-negative, it follows that $v_{(m)}^2 = \bar{v}_{(m)}^2$. Therefore, for the finite deformation and constraints under consideration, $v_{(m)}^2$ (and therefore $\omega_{(m)}^2$) is real for all m . The deformation characterized by λ_1 , λ_2 will then be stable if all the values $v_{(m)}^2$ are positive and unstable if one or more are zero or negative.

Each finite deformation characterized by the extension ratios λ_1, λ_2 can be represented by a point in a λ_1 - λ_2 plane. The undeformed state is then represented by the point $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, and possible finite deformations by points in the quadrant $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. In this plane, the stable states of deformation for fixed-end constraints will consist of a region of the plane including the point $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Suppose the lines of static instability are drawn in the λ_1 - λ_2 plane. Consider the region consisting of all points which can be reached from the undeformed point without crossing a line of latent instabilities. This region clearly is bounded by lines of latent instabilities and possibly by the edges $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ of the quadrant. If we consider a particular value ν^2 as a function of λ_1 and λ_2 , the lines of latent instabilities are located where ν^2 changes sign. Thus, since no line from the undeformed point to any point in the above described region crosses a latent instability, we expect that all the values $\nu_{(n)}^2$ are positive throughout this region, *i.e.* that the foregoing region is the region of stability.

In Sections 7, 8, and 9 we will discuss the stability for cylindrically symmetric modes of deformation of the circular cylindrical membrane for the finite deformation λ_1, λ_2 with the constraint of fixed ends.

In Section 7 we will obtain the stable region by considering the latent instabilities, while in Section 8 the geometry of this region will be discussed for a Mooney material. In Section 9 we will show that the region given by the results of Section 7 is indeed stable by determining the region where all values $\nu_{(n)}^2$ are positive. Further we will show that for certain values of the ratio C_2/C_1 for a Mooney material (see equation (2.14)) there is another stable region separated from the point $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ by lines of latent instability.

7. Static Analysis of Stability

In this section we determine the largest region such that every one of its points can be reached from the undeformed state $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ without crossing a line of static instability.

The equations for the determination of symmetric latent instabilities are from (6.2),

$$\beta_1 w_{,22} + \frac{\beta_2}{c} u_{,2} = 0, \quad (7.1)$$

$$\beta_3 u_{,22} - \frac{\beta_4}{c^2} u - \frac{\beta_2}{c} w_{,2} = 0,$$

and

$$\beta_8 v_{,22} = 0, \quad (7.2)$$

with the boundary conditions

$$u = v = w = 0 \quad \text{at} \quad \vartheta^2 = 0, l. \quad (7.3)$$

Note that the equation for v does not contain terms in u and w , and vice versa. From our assumption (5.27), we see from (7.2) and (7.3) that the displacement v does not give rise to any symmetric latent instabilities.

For equations (7.1) we assume solutions of the form

$$u = B_1 e^{\alpha \vartheta^2}, \quad w = B_2 e^{\alpha \vartheta^2},$$

where B_1 , B_2 , and α are constants to be determined. Substitution into equations (7.1) shows that the values of α for which the constants B_1 , B_2 can be non-zero are given by

$$\alpha = 0, 0, \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2}{\beta_1 \beta_3} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

The type of solution depends on the sign of $(\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2)/\beta_1 \beta_3$.

(a) In the case when

$$\frac{1}{c^2} \frac{\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2}{\beta_1 \beta_3} = \gamma^2 > 0, \quad \gamma > 0,$$

the solutions for u and w are

$$\begin{aligned} w &= A_1 + A_2 \vartheta^2 + A_3 \sinh \gamma \vartheta^2 + A_4 \cosh \gamma \vartheta^2, \\ u &= -c \frac{\beta_2}{\beta_4} A_2 - c \frac{\beta_1}{\beta_2} \gamma [A_4 \sinh \gamma \vartheta^2 + A_3 \cosh \gamma \vartheta^2], \end{aligned}$$

where A_1 , A_2 , A_3 , and A_4 are arbitrary constants. A latent instability is present if A_1 , A_2 , A_3 , and A_4 can be chosen so that the boundary conditions (7.3) are satisfied. The requirement that non-trivial equilibrium configurations exist is found to be

$$g(y) \equiv \cosh y - 1 - B y \sinh y = 0, \quad (7.4)$$

with

$$y = \gamma l, \quad B = \frac{\beta_1 \beta_4}{2\beta_2^2}.$$

The parameter B is positive because of the assumptions (5.27). Since

$$g(0) = \frac{dg}{dy}(0) = 0,$$

and also

$$\frac{d^2 g}{dy^2} = [1 - 2B] \cosh y - B y \sinh y,$$

equation (7.4) has no real solutions for $B > \frac{1}{2}$. Suppose that $\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 > 0$ and $\beta_3 > 0$. Then,

$$\beta_1 \beta_4 > \beta_2^2 \quad \text{or} \quad B = \frac{\beta_1 \beta_4}{2\beta_2^2} > \frac{1}{2}.$$

Therefore in the region $\beta_3 > 0$, $\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 > 0$ there are no latent instabilities. It is easy to show that latent instabilities do exist in the region

$$\beta_3 < 0, \quad \beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 < 0.$$

(b) In the case when

$$\frac{1}{c^2} \frac{\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4}{\beta_1 \beta_3} = \delta^2 > 0, \quad \delta > 0,$$

the solutions of equations (7.1) are

$$\begin{aligned} w &= A_1 + A_2 \vartheta^2 + A_3 \sin \delta \vartheta^2 + A_4 \cos \delta \vartheta^2, \\ u &= -c \frac{\beta_2}{\beta_4} A_2 + c \frac{\beta_1}{\beta_2} \delta [A_4 \sin \delta \vartheta^2 - A_3 \cos \delta \vartheta^2], \end{aligned}$$

where A_1, A_2, A_3 , and A_4 are arbitrary constants. The condition for a non-trivial equilibrium configuration is now

$$f(y) \equiv 1 - \cos y - B y \sin y = 0, \quad (7.5)$$

where

$$y = \delta l, \quad B = \frac{\beta_1 \beta_4}{2\beta_2^2}.$$

The initial dimensions of the membrane appear in (7.5) only in the ratio l/c . Thus the lines of latent instability are the same for each cylinder with the same initial ratio of length to radius. For a given value of l/c , we see from (7.5) that

$$\delta l = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

defines some, but not necessarily all, of the real solutions of equation (7.5).

Consider a point P in the λ_1 - λ_2 plane which lies on that part of the line $\beta_3 = 0$ where $\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 > 0$. Let Q be a point, in the region $\beta_3 < 0$, $\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 > 0$, lying arbitrarily close to P . At Q , for a given l/c , δl is positive. If m is the smallest integer such that δl at Q is less than $2m\pi$, δl will assume all the values $2n\pi$, $n > m$, as we move along the straight line from Q to P since as the point P is approached, $\delta l \rightarrow +\infty$. That is, any point on the line $\beta_3 = 0$ for which $\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 > 0$ is a limit point, for all l/c , of latent instabilities in the region $\beta_3 < 0$. However, it can be easily shown that no latent instabilities occur on the line $\beta_3 = 0$ itself except where $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$.

Again let us consider a given value of the ratio l/c . We find that

$$f(0) = \frac{df}{dy}(0) = 0,$$

while

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \sin y [1 - 2B] + B y \sin y. \quad (7.6)$$

Consider the part of Region (b) where β_3 and $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4$ are positive. Here, $0 < B < \frac{1}{2}$. Thus $d^2 f/dy^2$ is positive for all y in the range 0 to π . For $\pi < y < 2\pi$, $f(y) > 0$. Therefore, in the region where β_3 and $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4$ are both positive, the line of static instabilities corresponding to the smallest value of $y = \delta l$ is given by

$$\frac{\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4}{\beta_1 \beta_3} = 4\pi^2 (c/l)^2. \quad (7.7)$$

If a small additional normal pressure $\varepsilon p'^3$ is applied to the inner surface of the finitely deformed cylindrical membrane, the solution for the normal displacement u with $u = 0$ at $\vartheta^2 = 0$ and l , when the point λ_1 - λ_2 is in Region (b), is given by

$$u = \frac{E}{f(y)} \left[\cos \delta \xi - \cos \frac{\delta l}{2} \right], \quad (7.8)$$

where $f(y)$ is defined by equation (7.5), and where

$$\xi = \vartheta^2 - l/2, \quad E = \frac{\beta_1}{\beta_2^3} \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^5}{h} \delta l p'^3 \sin \frac{\delta l}{2}.$$

From equation (7.8), we see an illustration of the well-known result that whenever a system possesses a non-trivial equilibrium configuration ($f(y) = 0$), the

application of small surface forces would cause an unbounded deformation. It is easy to see from (7.8) that for $\beta_3 > 0$ and for

$$0 < \frac{\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4}{\beta_1 \beta_3} < 4\pi^2 (c/l)^2,$$

u is positive for all pertinent ξ (or ϑ^2). However, when

$$\frac{\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4}{\beta_1 \beta_3} > 4\pi^2 (c/l)^2, \quad (7.9)$$

the radial displacement εu has one or more interior nodes (where $u=0$), and is an oscillatory function of ϑ^2 . This behavior of the displacement εu suggests buckling (and instability) of the tube wherever (7.9) is satisfied.

It can readily be shown that for $\beta_3 > 0$, the line $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ has no static instabilities except for the limiting case $l/c \rightarrow \infty$ where the line $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ coincides with a line of static instabilities. The intersection point of $\beta_3 = 0$ with $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ has a latent instability.

Consider the region defined by

$$\beta_3 \geq 0, \quad \beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 < 4\beta_1 \beta_3 \pi^2 (c/l)^2. \quad (7.10)$$

From the results of this section, there are no static instabilities within this region. Moreover, as can be seen from equations (5.25) and (5.23), this region includes the point $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Starting at the point $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, we find that we can not leave the region defined by (7.10) without crossing a line of static instabilities.

If region (7.10) is simply-connected, it is the region defined in the first paragraph of Section 7 and is the stable region, as will be shown in Section 9. If region (7.10) is multiply-connected, the region we set out to find is the part of (7.10) contiguous to $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$ and is stable. However, as we will see in Section 9, the complete stable region consists of (7.10) in its entirety.

8. Stable Regions for the Mooney Material

In this section we will investigate the geometry of region (7.10) for the Mooney material, equation (2.14). The ratio of the constants entering into expression (2.14) for the strain-energy function will be denoted by Γ ,

$$\Gamma = C_2/C_1. \quad (8.1)$$

The line $\beta_3 = 0$ is a (closed) boundary of the region (7.10) and is the same for all incompressible materials and for all ratios l/c . From equations (5.25), this curve is given by

$$\lambda_1^2 \lambda_2^4 - 1 = 0, \quad (8.2)$$

and comparison with (5.13) shows that it is the line on which the axial force T in the membrane is zero. It is well known that a thin membrane becomes unstable whenever it is stressed by compressive forces, and under axial compression the cylinder can buckle in symmetric modes. The cylinder is unstable also under external pressure, that is for negative p^3 , and the cylinder then buckles in unsymmetric modes. From equation (5.13), the pressure is zero when

$$\lambda_1^4 \lambda_2^2 - 1 = 0, \quad (8.3)$$

independent of the form of the strain-energy function and of l/c . The present discussion of stability is confined to symmetrical modes in the dynamic analysis and to symmetric latent instabilities in the static analysis and the instability under

external pressure does not appear. It must be remembered in the following, therefore, that points of the region (7.10) for which $p^3 < 0$, that is below the line (8.3), are unstable.

The other boundary of the stable region is not so obvious from physical considerations and depends strongly on the form of the strain-energy function. In order to discuss the shape of the boundary (7.7), it is useful to first investigate the curve $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$. This curve depends on the particular form of the strain-energy function used but is independent of the ratio l/c .

Fig. 2 shows the curve $\beta_3 = 0$ and indicates the shape of the locus $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ for $0 < \Gamma < 1$. It can

be shown that the locus consists of three branches, two of them asymptotic to the curve $\beta_2 = 0$ for large λ_1 . The curve $\beta_3 = 0$ has two intersections with the curve $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$. The parameter β_3 is greater than zero above $\beta_3 = 0$ and

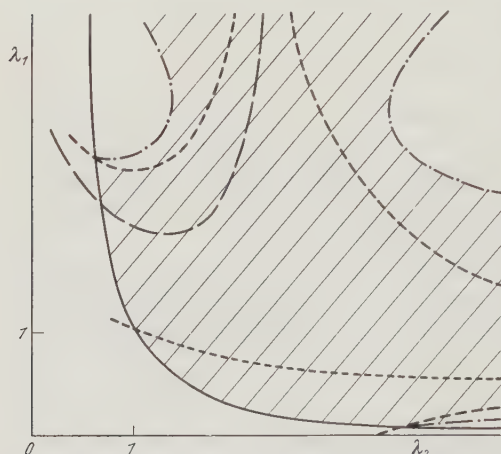


Fig. 2. λ_1 - λ_2 plane and region (7.10) for a Mooney material with $0 < \Gamma < 1$. — $\beta_3 = 0$, ···· $p^3 = 0$, [hatched] Region (7.10), - - - $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$, - · - $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 4\beta_1 \beta_3 \pi^2 (c/l)^2$

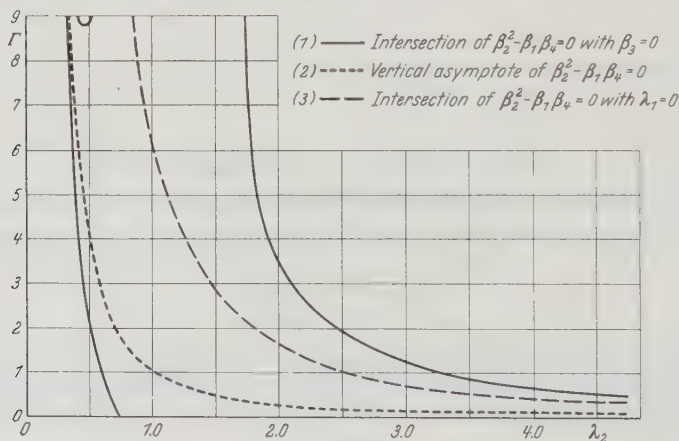


Fig. 3. Γ - λ_2 plane for Mooney material

negative below, while $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4$ is positive above the upper branches of $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ and below the lower branch, negative elsewhere.

For very large values of l/c , the (open) partial boundary of region (7.10) defined by equation (7.7) virtually coincides with the part of the curve $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ where $\beta_3 \geq 0$. As l/c decreases, these boundary curves separate from the curve $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$. In Fig. 2 the branches of the curve (7.7) are indicated for an intermediate value of the ratio l/c . For very small l/c , the upper right-hand branch of the

curve (7.7) moves to the region where λ_2 is large, the other two branches approaching the curve $\beta_3=0$. The shaded area in Fig. 2 indicates the shape of the region (7.10) for values of Γ between zero and unity, and an intermediate value of l/c .

In Fig. 3, a Γ - λ_2 plane is taken and the following curves are plotted:

(1) For a given Γ , this curve gives the value of λ_2 where $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 0$ intersects $\beta_3 = 0$.

(2) For a given Γ , this curve gives the values of λ_2 where the upper branches of $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 0$ have vertical asymptotes in the λ_1 - λ_2 plane, Fig. 2.

(3) For a given Γ , this curve gives the value of λ_2 where the lower branch of $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 0$ intersects $\beta_3 = 0$.

As Γ increases from the particular value used in Fig. 2, there is a general shift to the left of the branches of $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 0$, and the locus (7.7) still bears in general terms the same relationship to $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 0$ as we have outlined above. For decreasing Γ , the shift is to the right.

Fig. 4 shows the λ_1 - λ_2 plane for the particular values $\Gamma=0.1$ [6] and $l/c=6$ within a physically reasonable range of λ_1 and λ_2 . The intersection of the lower branch of the curve $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 0$ with $\lambda_1=0$ occurs for a value of λ_2 greater than 8. An extension ratio of 8 is too large to be of physical significance. For $l/c < 6$, the upper right-hand branch of the curve (7.7) lies to the right of $\lambda_2 = 7.87$ so that, unless we are dealing with a very thin tube, this branch is unimportant. Also shown in Fig. 4 are the curves (7.7) for $l/c = \infty$ and the curve (8.3) for which $p^3 = 0$.

Decreasing Γ to zero, we obtain the case of a neo-Hookean material, see equation (2.15). In Fig. 5 the relevant curves for tubes of various initial ratios are shown for a neo-Hookean material.

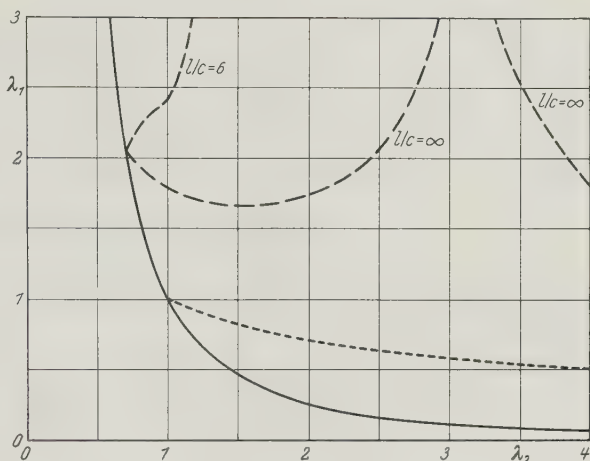


Fig. 4. Stable region for Mooney material; $\Gamma=0.1$, $l/c=6, \infty$ — $\beta_3=0$, ---- $p^3=0$, - · - $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 4\beta_1\beta_3\pi^2(c/l)^2$

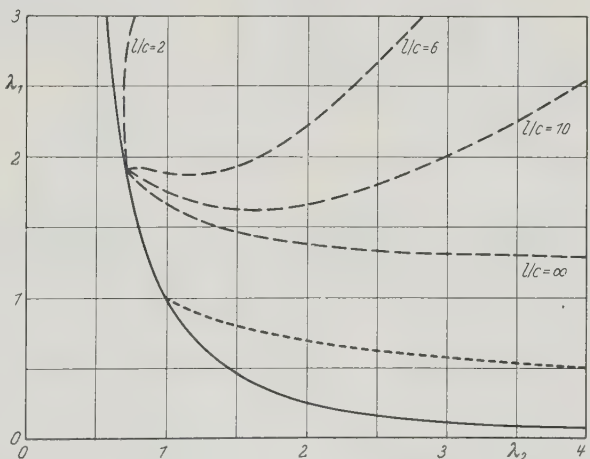


Fig. 5. Stable region for neo-Hookean material; $l/c=2, 6, \infty$ — $\beta_3=0$, ---- $p^3=0$, - · - $\beta_2^2 - \beta_1\beta_4 = 4\beta_1\beta_3\pi^2(c/l)^2$

One major difference between the stable regions for the Mooney and the neo-Hookean materials is that for the former there is a range of values of λ_2 for which the membrane is stable for all values of λ_1 which are large enough.

From Fig. 3, we see that for $\Gamma > 8.72$, the curve $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ intersects $\beta_3 = 0$ four times. This occurs because the peak of $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$ has moved so far to the left that it has crossed $\beta_3 = 0$. These values of Γ are far larger than those of physical interest but it is of theoretical interest to note that in this range the stable region (7.10) becomes doubly-connected and we have a stable region separated by instabilities from the stable region about $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

9. Dynamic Analysis of Stability

In this section we will show that the region (7.10) is the region of stability for cylindrically symmetric deformations by considering the sign of the frequency parameter $\nu^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^4 \rho \omega^2$.

The equations of motion are, from equations (6.2),

$$\beta_1 W_{,22} + \frac{\beta_2}{c} U_{,2} = -\nu^2 W, \quad (9.1)$$

$$\beta_3 U_{,22} - \frac{\beta_4}{c^2} U - \frac{\beta_2}{c} W_{,2} = -\nu^2 U,$$

and

$$\beta_8 V_{,22} = -\nu^2 V. \quad (9.2)$$

The boundary conditions are again given by equations (6.4).

The equation for the circumferential displacement V is uncoupled from those for the radial and axial displacements, U and W . It has been seen that this mode has no static instabilities. From (9.2) and (6.4), we easily find that the frequencies for circumferential modes are given by

$$\nu_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \beta_8, \quad (9.3)$$

and, from the assumption $\beta_8 > 0$, we see that ν_n^2 is positive for all n . Hence the membrane is stable for all symmetric torsional modes.

Let us now examine the equations for U and W . Along the line $\beta_3 = 0$, *i.e.* for zero axial force, equations (9.1) become

$$\begin{aligned} \beta_1 W_{,22} + \frac{\beta_2}{c} U_{,2} + \nu^2 W &= 0, \\ \left(\nu^2 - \frac{\beta_4}{c^2} \right) U - \frac{\beta_2}{c} W_{,2} &= 0. \end{aligned}$$

Assuming solutions of the form

$$\begin{aligned} U &= B_1 e^{\alpha \beta^2}, \\ W &= B_2 e^{\alpha \beta^2}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

where B_1 , B_2 , and α are constants, we find that for non-zero values of B_1 and B_2 , α must satisfy

$$\alpha^2 = \frac{\nu^2 - \frac{\beta_4}{c^2}}{\frac{1}{c^2} (\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2) - \beta_1 \nu^2} \nu^2.$$

Setting

$$\mu = \left[\frac{\left(\nu^2 - \frac{\beta_4}{c^2} \right) \nu^2}{\frac{1}{c^2} (\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2) - \beta_1 \nu^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

the general solutions for U and W are

$$U = B_1 \sinh \mu \vartheta^2 + B_2 \cosh \mu \vartheta^2,$$

$$W = B_3 \sinh \mu \vartheta^2 + B_4 \cosh \mu \vartheta^2,$$

where B_1 to B_4 are arbitrary constants. Applying the boundary conditions, we find that they require

$$\sinh \mu l = 0,$$

and it follows that $\mu l = n \pi i$. The frequency parameters ν_n^2 are therefore given by (two values for each integer n)

$$\nu_n^2 = \frac{1}{2c^2} \left[\left(\beta_4 + \beta_1 \frac{n^2 \pi^2}{(l/c)^2} \right) \pm \left\{ \left(\beta_4 + \beta_1 \frac{n^2 \pi^2}{(l/c)^2} \right)^2 + 4 \frac{n^2 \pi^2}{(l/c)^2} \Theta \right\}^{\frac{1}{2}} \right], \quad (9.5)$$

where $\Theta = \beta_2^2 - \beta_1 \beta_4$. For $\Theta < 0$, there can be instability only if for some integer n ,

$$\left(\beta_4 + \beta_1 \frac{n^2 \pi^2}{(l/c)^2} \right)^2 < 4 \frac{n^2 \pi^2}{(l/c)^2} (\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2).$$

However this is equivalent to

$$\left[\beta_4 - \beta_1 \frac{n^2 \pi^2}{(l/c)^2} \right]^2 < -4 \beta_2^2 \frac{n^2 \pi^2}{(l/c)^2},$$

which is impossible. Therefore points along the line $\beta_3 = 0$ are stable for $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 < 0$.

For $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 > 0$, ν_n^2 has one negative value and one positive value so the points on the curve $\beta_3 = 0$ are unstable for $\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 > 0$. For $\beta_3 = \beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 = 0$, we have instability since from (9.5), there must be zero natural frequencies at this point.

Consider a general point where β_3 is non-zero. Assuming solutions of the form (9.4) in equations (9.1), we find that α must be of the form

$$\begin{aligned} \alpha^2 = & \frac{1}{2\beta_1 \beta_3 c^2} [\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 - (\beta_1 + \beta_3) c^2 \nu^2 \pm \\ & \pm \{ (\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 + (\beta_1 + \beta_3) c^2 \nu^2)^2 - 4\beta_1 \beta_3 (c^2 \nu^2 - \beta_4) c^2 \nu^2 \}^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

For each value of ν , there are four solutions for α and they will be denoted by $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. From a dimensional argument we see that both ν^2 and α^2 are proportional to $1/c^2$. Defining δ_1 and δ_2 as

$$\alpha_1 = \delta_1, \quad \alpha_2 = -\delta_1, \quad \alpha_3 = \delta_2, \quad \alpha_4 = -\delta_2, \quad (9.10)$$

we find that the general solution of equations (9.1) is

$$\begin{aligned} U = & A_1 e^{\delta_1 \vartheta^2} + A_2 e^{-\delta_1 \vartheta^2} + A_3 e^{\delta_2 \vartheta^2} + A_4 e^{-\delta_2 \vartheta^2}, \\ W = & -\frac{\beta_2}{c} \left[\frac{\delta_1}{\beta_1 \delta_1^2 + \nu^2} \{ A_1 e^{\delta_1 \vartheta^2} - A_2 e^{-\delta_1 \vartheta^2} \} + \frac{\delta_2}{\beta_1 \delta_2^2 + \nu^2} \{ A_3 e^{\delta_2 \vartheta^2} - A_4 e^{-\delta_2 \vartheta^2} \} \right], \end{aligned} \quad (9.11)$$

where A_1 to A_4 are arbitrary constants. In order that the fixed-end conditions be satisfied, we must have the following relation connecting ν^2 , δ_1 , δ_2 , and the β 's.

$$0 = [\delta_1^2 (\beta_1 \delta_2^2 + \nu^2)^2 + \delta_2^2 (\beta_1 \delta_1^2 + \nu^2)^2] [e^{\delta_2 l} - e^{-\delta_2 l}] [e^{-\delta_1 l} - e^{\delta_1 l}] + \\ + 2 \delta_1 \delta_2 (\beta_1 \delta_1^2 + \nu^2) (\beta_1 \delta_2^2 + \nu^2) \times \quad (9.12) \\ \times [\{e^{-\delta_2 l} - e^{-\delta_1 l}\} \{e^{\delta_1 l} - e^{\delta_2 l}\} + \{e^{\delta_2 l} - e^{-\delta_1 l}\} \{e^{\delta_1 l} - e^{-\delta_2 l}\}].$$

This can be simplified to

$$(\delta_1 + \delta_2) (\nu^2 + \beta_1 \delta_1 \delta_2) \sinh \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} l = \pm (\delta_1 - \delta_2) (\nu^2 - \beta_1 \delta_1 \delta_2) \sinh \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} l. \quad (9.13)$$

Equations (9.6) and (9.12) or (9.13) completely determine ν^2 and in (9.12) and (9.13), l and c occur only in the combination l/c .

First we will show that the region $\beta_3 < 0$ is unstable. Assume that in this region there is a solution ν^2 which is negative. Then, as can be seen from (9.6), we can write

$$\delta_1 = \delta, \quad \delta_2 = i d,$$

where δ and d are real and positive. Equation (9.12) becomes

$$S(\nu^2) = 0,$$

where

$$S(\nu^2) = [d^2 (\nu^2 + \beta_1 \delta^2)^2 - \delta^2 (\nu^2 - \beta_1 d^2)^2] \sinh \delta l \sin d l + \\ + 2 d \delta (\nu^2 + \beta_1 \delta^2) (\nu^2 - \beta_1 d^2) [\cosh \delta l \cos d l - 1].$$

For $|\nu^2|$ very large, we find from (9.6) that δ^2 and d^2 are given by

$$\delta^2 = -\frac{\nu^2}{\beta_1} + \frac{\beta_2^2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_3) c^2} - \frac{\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_3)^3 \nu^2 c^4} [\beta_2^2 - (\beta_1 - \beta_3) \beta_4] + \\ + \frac{\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_3)^5 \nu^4 c^6} [\beta_2^2 - (\beta_1 - \beta_3) \beta_4] [\beta_2^2 (\beta_1 + \beta_3) - \beta_1 \beta_4 (\beta_1 - \beta_3)], \\ d^2 = \frac{\nu^2}{\beta_3} - \frac{1}{\beta_3 (\beta_1 - \beta_3) c^2} [(\beta_1 - \beta_3) \beta_4 - \beta_2^2] - \frac{\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_3)^3 \nu^2 c^4} [\beta_2^2 - (\beta_1 - \beta_3) \beta_4] + \\ + \frac{\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_3)^5 \nu^4 c^6} [\beta_2^2 - (\beta_1 - \beta_3) \beta_4] [\beta_2^2 (\beta_1 + \beta_3) - \beta_1 \beta_4 (\beta_1 - \beta_3)],$$

where terms involving ν^{-6} and higher negative powers are neglected. It can be seen that δ and d increase monotonically with $|\nu^2|$. Neglecting terms involving negative powers of ν^2 , the coefficients in the expression for $S(\nu^2)$ are given by

$$2 d \delta (\nu^2 + \beta_1 \delta^2) (\nu^2 - \beta_1 d^2) = -\frac{2 \beta_2^2}{\beta_3 (-\beta_1 \beta_3)^{\frac{1}{2}} c^6} \left[c^4 \nu^4 - \frac{\beta_4}{2} c^2 \nu^2 - \frac{\beta_4^2}{8} \right], \\ d^2 (\nu^2 + \beta_1 \delta^2)^2 - \delta^2 (\nu^2 - \beta_1 d^2)^2 = \frac{(\beta_1 - \beta_3)^2}{\beta_1 \beta_3^3} \nu^6 - \frac{(\beta_2^2 + 2 \beta_1 \beta_4) (\beta_1 - \beta_3) - 2 \beta_1 \beta_2^2}{\beta_1 \beta_3^3} \frac{\nu^4}{c^2} + \\ + \frac{\beta_3 \beta_4^2 - \{\beta_2^2 - (\beta_1 - \beta_3) \beta_4\} \{\beta_3 (\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4) + \beta_1^2 \beta_4\}}{\beta_3^3 (\beta_1 - \beta_3)^2} \frac{\nu^2}{c^4}.$$

Thus, for large $|\nu^2|$, both coefficients in the expression for $S(\nu^2)$ are negative. Therefore it is certainly possible to choose a constant $b_1 < 0$ such that for $\nu^2 < b_1$, the coefficients are negative and d , δ increase without limit as ν^2 decreases without limit. Certainly there exists a constant $b_2 < b_1$ such that for $\nu^2 < b_2$, $\cosh \delta l > 2/\sqrt{2}$. There exists $b_3 < b_2$ and an integer n such that for $\nu^2 = b_3$, $d l = (2n + \frac{5}{4})\pi$. At

once, $S(b_3) > 0$. Finally, there exists $b_4 < b_3$ such that at $\nu^2 = b_4$, $dl = [2(n+1) + \frac{1}{4}]\pi$ but $S(b_4) < 0$. Therefore there must be a solution ν^2 to (9.6) and (9.12) in the range $b_4 < \nu^2 < b_3 < 0$. That is, the membrane is unstable for $\beta_3 < 0$.

It remains to consider the region $\beta_3 > 0$. From equation (9.6), we see that the nature of δ_1 and δ_2 depends on λ_1 , λ_2 , and ν^2 . Suppose $\beta_1\beta_4 - \beta_2^2 \geq 0$. If there is a solution $\nu^2 < 0$ in this range, δ_1 and δ_2 must be of the following types:

- (i) $\delta_1 = \delta_2$,
- (ii) δ_1 and δ_2 real,
- (iii) δ_1 and δ_2 complex.

For case (i), equations (9.11) do not apply. Writing a general solution for case (i), we apply the boundary conditions and find that the resulting transcendental equation can have no solutions for which ν^2 is negative.

Solving (9.13) for ν^2 , we obtain

$$\nu^2 = -\beta_1 \delta_1 \delta_2 \frac{(\delta_1 + \delta_2) \sinh \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)l \mp (\delta_1 - \delta_2) \sinh \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)l}{(\delta_1 + \delta_2) \sinh \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)l \pm (\delta_1 - \delta_2) \sinh \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)l}. \quad (9.14)$$

Suppose there is a solution $\nu^2 < 0$ for which δ_1 and δ_2 are real, case (ii). Both δ_1 and δ_2 may be considered positive without loss in generality. Setting

$$B_1 = \frac{(\delta_1 - \delta_2)l}{2}, \quad B_2 = \frac{(\delta_1 + \delta_2)l}{2},$$

B_1 and B_2 are real, $B_2 > B_1$, and without loss in generality we may assume that $B_1 > 0$. Then equation (9.14) becomes

$$\nu^2 = -\beta_1 \delta_1 \delta_2 \frac{B_2 \sinh B_1 \mp B_1 \sinh B_2}{B_2 \sinh B_1 \pm B_1 \sinh B_2} = -\beta_1 \delta_1 \delta_2 T_{ii}^{(\mp)},$$

where we have written

$$T_{ii}^{(-)} = \frac{1}{T_{ii}^{(+)}} = \frac{B_1 B_2}{B_2 \sinh B_1 + B_1 \sinh B_2} \left[\frac{\sinh B_1}{B_1} - \frac{\sinh B_2}{B_2} \right].$$

Since $B_2 > B_1 > 0$,

$$\frac{\sinh B_1}{B_1} - \frac{\sinh B_2}{B_2} < 0$$

and $T_{ii}^{(\mp)} < 0$. Therefore, since $\beta_1 \delta_1 \delta_2 > 0$, ν^2 is positive. This is a contradiction so that for $\beta_3 > 0$ and $\beta_1\beta_4 - \beta_2^2 > 0$ there are no negative solutions for ν^2 where δ_1 and δ_2 are both real.

Suppose $\nu^2 < 0$ and δ_1, δ_2 are complex, case (iii). Since δ_1, δ_2 are then complex conjugates, we may write

$$\delta_1 = b_1 + i b_2, \quad \delta_2 = b_1 - i b_2,$$

where b_1 and b_2 may be taken to be positive without loss in generality. Substituting into (9.14), we obtain

$$\nu^2 = -\beta_1 (b_1^2 + b_2^2) \frac{b_1 \sin b_2 l \mp b_2 \sinh b_1 l}{b_1 \sin b_2 l \pm b_2 \sinh b_1 l} = -\beta_1 (b_1^2 + b_2^2) T_{ii}^{(\mp)}.$$

Now,

$$\begin{aligned} & b_1 |\sin b_2 l| - b_2 \sinh b_1 l \\ &= \frac{1}{l} \{b_1 l |\sin b_2 l| - b_2 l \sinh b_1 l\} < \frac{b_2 l}{l} \{b_1 l - \sinh b_1 l\} < 0, \end{aligned}$$

since

$$0 < b_1 l < \sinh b_1 l, \quad b_2 l > |\sin b_2 l|.$$

Therefore

$$b_1 \sin b_2 l + b_2 \sinh b_1 l > 0,$$

$$b_1 \sin b_2 l - b_2 \sinh b_1 l < 0,$$

which implies $T_{iii}^{(i)} < 0$. Hence $\nu^2 > 0$, a contradiction. Thus the region $\beta_3 > 0$, $\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 > 0$ is stable.

Finally by a similar but more complicated analysis we can show that for

$$\beta_3 > 0, \quad 0 \leq \beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 < 4\beta_1 \beta_3 \pi^2 \left(\frac{c}{l}\right)^2,$$

there are no negative solutions for ν^2 but that for

$$\beta_3 > 0, \quad \beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 > 4\beta_1 \beta_3 \pi^2 \left(\frac{c}{l}\right)^2,$$

there are solutions for ν^2 which are negative. The details of the work will not be given here, as the method does not appear to be of general interest.

In this way we are able to establish that the region defined by (7.10) is the stable region.

10. Determination of the Natural Frequencies

Equations (9.6) and (9.12) or (9.13) determine the natural frequencies of cylindrically symmetric vibrations, involving radial and axial displacements u and w , for a circular cylindrical membrane of incompressible material which has been finitely extended and inflated. It does not seem possible to obtain an explicit expression for ν^2 in terms of $\lambda_1, \lambda_2, l/c, c$ even for the simplest form of the strain-energy function, that for a neo-Hookean material. To compute ν^2 we may proceed in the following way. For particular extension ratios λ_1, λ_2 and a particular length to radius ratio l/c , we assume a value for ν^2 of the form τ/c^2 with τ a positive constant. Substitution into (9.6) gives the values of δ_1 and δ_2 for this value of ν^2 . Substitution of these values into (9.12) or (9.13) will tell whether the choice τ/c^2 is close to a solution. Proceeding by trial and error we can obtain a sequence of values for ν^2 which can be made to approach the true value to any degree of accuracy desired. From equation (6.3) we then obtain the natural frequencies ω for fixed ends. This is a cumbersome procedure and it would be quite useful to develop an approximate method for the determination of the natural frequencies.

For the higher frequency modes it is to be expected that the influence of the boundary conditions at the ends of the cylinder on the values of the frequencies is small. By relaxing the condition of fixed ends, the computations are greatly simplified. One approach is to assume that the modes of vibration are approximated by

$$\begin{aligned} u &= B_1 \sin \frac{m \pi \vartheta^2}{l} \cos \omega t, \\ w &= B_2 \cos \frac{m \pi \vartheta^2}{l} \cos \omega t, \end{aligned} \tag{10.4}$$

where m is an integer and where B_1, B_2 are constants. In these modes the ends remain circular ($u=0$ at the ends) but the axial displacement w at the ends is non-zero, and in the literature (see [9] for example) they are referred to as

“breathing modes”. The boundary conditions are referred to as “freely supported”. Assuming solutions of the form

$$u = B_1 \cos \frac{m \pi \partial^2}{l} \cos \omega t, \\ w = B_2 \sin \frac{m \pi \partial^2}{l} \cos \omega t$$

leads to the same values for the frequencies.

Substituting (10.1) into the equations of motion, we find that in order for B_1, B_2 to be non-zero, ν^2 must be given by

$$2c^2 \nu_m^2 = \beta_4 + (\beta_1 + \beta_3) \frac{m^2 \pi^2}{(l/c)^2} \pm \left\{ (\beta_4 + (\beta_1 + \beta_3) \frac{m^2 \pi^2}{(l/c)^2})^2 - 4 \frac{m^2 \pi^2}{(l/c)^2} (\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 + \beta_1 \beta_3 \frac{m^2 \pi^2}{(l/c)^2}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10.2)$$

where $m=1, 2, \dots$.

The stability region for the cylinder with freely-supported ends is found to be

$$\beta_3 \geq 0, \quad \beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 < \beta_1 \beta_3 \frac{\pi^2}{(l/c)^2}, \quad (10.3)$$

This region is contained within the stable region for fixed ends.

Consider the solutions of (9.12) for large ν^2 . In particular, we are interested in the range $\nu^2 c^2 > \beta_4$. For this range, the quantities δ_1, δ_2 defined in (9.10) are purely imaginary and (9.12) can be written $S(\nu^2)=0$, where now

$$S(\nu^2) = [\varepsilon_1^2 (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_2^2)^2 + \varepsilon_2^2 (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_1^2)^2] \sin \varepsilon_1 l \sin \varepsilon_2 l - \\ - 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_1^2) (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_2^2) [1 - \cos \varepsilon_1 l \cos \varepsilon_2 l], \quad (10.4)$$

and where $\delta_1 = i \varepsilon_1, \delta_2 = i \varepsilon_2$. We choose values for $\lambda_1, \lambda_2, l/c$ and assume a particular value for ν^2 . Substitution into (9.6) gives ε_1 and ε_2 . Inserting ν^2 and $\varepsilon_1(\nu^2), \varepsilon_2(\nu^2)$ into (10.4), we obtain S for this value of ν^2 . Whenever $S=0$, this value for ν^2 is a solution.

Expanding ε_1 and ε_2 for large ν^2 , we find that:

- (1) ε_1 and ε_2 both increase monotonically with ν^2 ,
- (2) $2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_1^2) (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_2^2)$ is negative and of order ν^4 ,
- (3) $\varepsilon_1^2 (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_2^2)^2 + \varepsilon_2^2 (\nu^2 - \beta_1 \varepsilon_1^2)^2$ is positive and of order ν^6 .

The first term in the expression for S vanishes whenever either $\varepsilon_1 l$ or $\varepsilon_2 l$ is equal to $m\pi, m=1, 2, \dots$. From (2) and (3) above, the sign of S , for large ν^2 , can change only when $\varepsilon_1 l$ or $\varepsilon_2 l$ are close to $m\pi$, since except when $\sin \varepsilon_1 l \sin \varepsilon_2 l \sim 0$, the first term in the expression for S predominates. From (9.6), when $\varepsilon_1 l$ or $\varepsilon_2 l$ is equal to $m\pi$ we have

$$- \frac{m^2 \pi^2}{(l/c)^2} = \frac{1}{2 \beta_1 \beta_3} [\beta_1 \beta_4 - \beta_2^2 - (\beta_1 + \beta_3) c^2 \nu^2 \pm \{ (\beta_2^2 - \beta_1 \beta_4 + (\beta_1 + \beta_3) c^2 \nu^2)^2 - 4 \beta_1 \beta_3 (c^2 \nu^2 - \beta_4) c^2 \nu^2 \}^{\frac{1}{2}}].$$

Solving this equation for ν^2 , we again obtain equation (10.2). It follows, therefore, that the frequencies for the breathing modes are good approximations to the frequencies for fixed ends when the frequencies are large.

Comparing (9.5) with (10.2), we find that on $\beta_3=0$, the frequencies are the same for both freely-supported and fixed ends. The same is true on the line $\beta_2=0$. We thus expect that the freely-supported ends approximation will be useful in the region between $\beta_3=0$ and $\beta_2=0$ for small ν^2 also.

11. Numerical Results

Fig. 6 compares the axially symmetric vibration frequencies as a function of λ_1 for fixed and freely-supported end conditions when $\Gamma=0$, $l/c=6$, and $\lambda_2=1$ (neo-Hookean material, no axial extension). We see that the frequencies

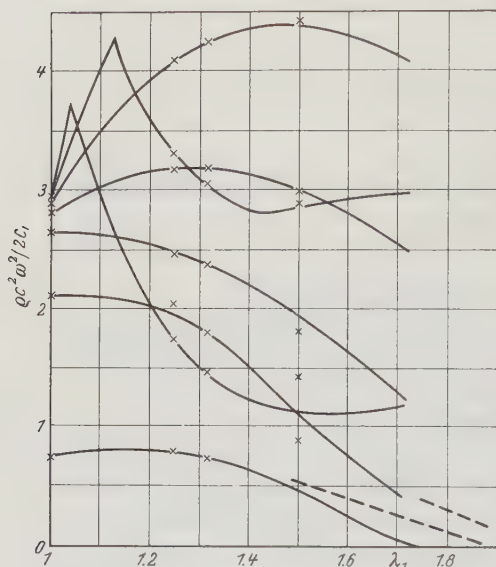


Fig. 6. Comparison of lowest frequencies for fixed and freely-supported ends; $l/c=6$, $\lambda_2=1$, $\Gamma=0$. — Freely supported ends, \times isolated values for fixed ends

coincide when $\beta_3=0$ and when $\beta_2=0$ as mentioned previously in Section 10. For the situation represented in Fig. 6, the frequencies for the two end conditions coincide at $\lambda_1=1$ and $\lambda_1=1.315$. Thus we expect that the agreement for intermediate values should be good even for small frequencies, as can be seen from Fig. 6 for the particular case $\lambda_1=1.25$. Finally we notice that at $\lambda_1=1.88$, which from Fig. 5 is where the tube becomes unstable, the lowest frequency goes to zero, as it should do. As is to be expected, the agreement between the lower frequencies is poor for values of λ_1 near the point where the cylinder becomes unstable.

Figs. 7, 8, and 9 and the Table indicate the changes in the lowest frequencies for freely-supported ends as the parameters are varied.

Fig. 7 illustrates the variation of $q c^2 \omega^2 / 2 C_1$ with Γ . The two lowest frequencies are plotted against Γ for $\lambda_1=1.25$, $\lambda_2=1$, and $l/c=6$. It can be seen that for fixed λ_1 , λ_2 , and l/c , the frequency parameter ω^2 increases almost linearly with Γ .

Table. Lower Frequencies, Freely-Supported Ends; $\lambda_1=1.25$, $\lambda_2=1$, $l/c=2$, $\Gamma=0, 0.1$

m	$q c^2 \omega_m^{(-)2} / 2 C_1$		$q c^2 \omega_m^{(+)2} / 2 C_1$	
	$\Gamma=0$	$\Gamma=0.1$	$\Gamma=0$	$\Gamma=0.1$
1	2.48	2.74	7.23	8.40
2	5.16	5.84	28.79	33.31
3	9.60	10.98	64.73	74.87
4	15.82	18.17	115.0	133.0
5	23.82	27.40	179.8	207.8
10	90.46	104.5	718.9	831.0

In Fig. 8 $q c^2 \omega_1^2 / 2 C_1$, where ω_1 is the lowest frequency, is plotted against λ_1 for $\lambda_2=1$, $l/c=2$, and $\Gamma=0, 0.1$. The instability point is at a higher value of

λ_1 for $\Gamma=0.1$ than for the neo-Hookean material, $\Gamma=0$. From equation (10.2), there are, for each integer m , two values for ν^2 and therefore for ω^2 . These values are denoted by $\omega_m^{(+)^2}$ and $\omega_m^{(-)^2}$ and for $l/c=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_1=1.25$, the Table gives the values of $\rho c^2 \omega_m^{(\pm)^2}/2C_1$ for $m=1, 2, 3, 4, 5$, and 10 and for $\Gamma=0$ and 0.1.

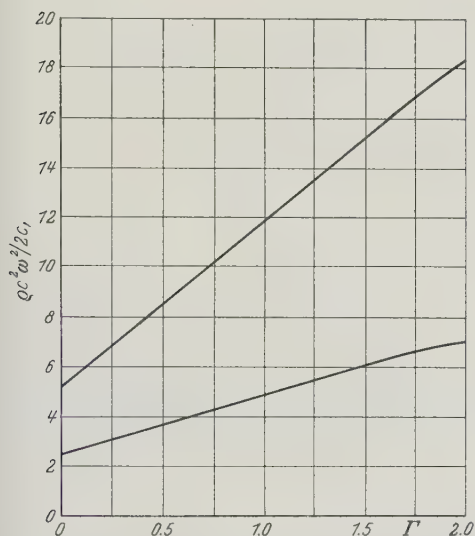


Fig. 7. Two lowest frequencies as a function of Γ for freely-supported ends; $l/c=2$, $\lambda_1=1.25$, $\lambda_2=1$

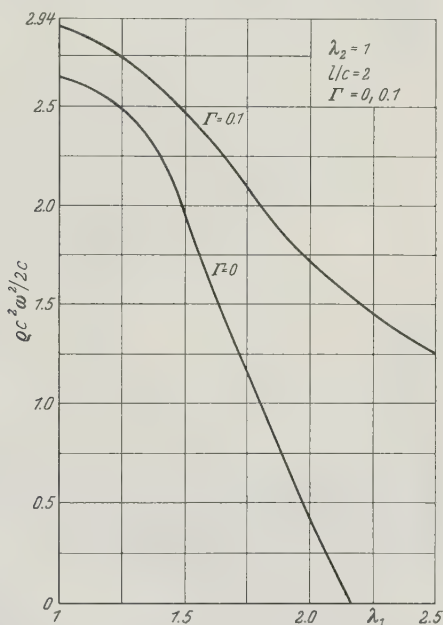


Fig. 8. Lowest frequency for freely-supported ends

Fig. 9 shows the variation of the lowest frequency with λ_1 , for $\lambda_2=1$ and $l/c=2, 6, 10$ in the case of a neo-Hookean material, $\Gamma=0$.

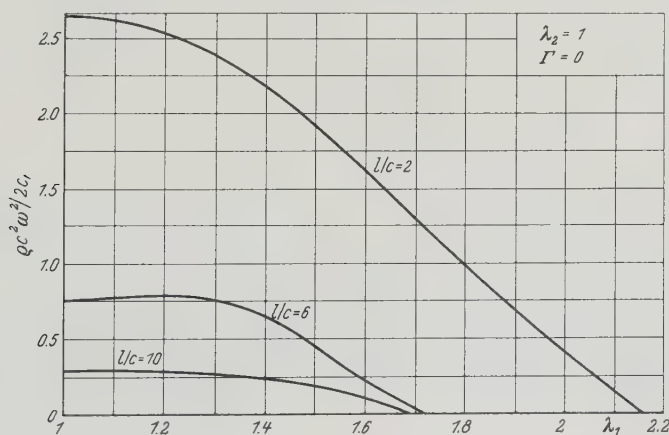


Fig. 9. Lowest frequency for freely-supported ends and various l/c

For $\Gamma=0$, $l/c=6$, $\lambda_2=1$, and $\lambda_1=1.5$ the first and second eigenfunctions $U^{(1)}$, $W^{(1)}$ and $U^{(2)}$, $W^{(2)}$ were computed for fixed ends. It was found that $W^{(1)}$ is an even function of $\xi=\vartheta^2-l/2$ with no zeros except at the ends while $U^{(1)}$

is odd with one interior zero, at the mid-point $\xi=0$. For the second eigenvector, $U^{(2)}$ is even with no zeros except at the ends while $W^{(2)}$, which is odd, has a zero at the mid-point. In Fig. 10, these eigenfunctions have been plotted against ξ . They have been suitably scaled so that the shapes of $U^{(1)}$, $W^{(1)}$, $U^{(2)}$, and $W^{(2)}$ may be compared.

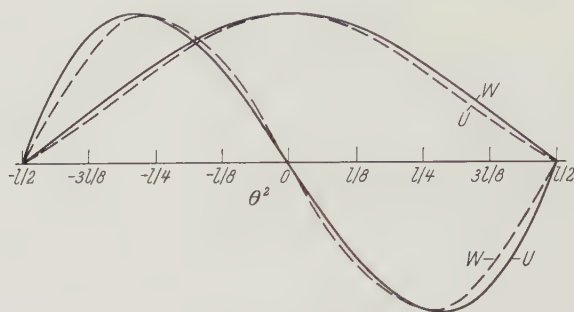


Fig. 10. Eigenfunctions, fixed ends, for two lowest frequencies with $T=0$, $l/c=6$, $\lambda_2=1$, $\lambda_1=1.5$. — Lowest frequency, — — second lowest frequency

Acknowledgement. The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Office of Ordnance Research, U. S. Army, under Contract No. DA-19-020-ORD-4725.

References

- [1] GREEN, A. E., & W. ZERNA: Theoretical Elasticity. Oxford: Oxford Univ. Press 1954.
- [2] RIVLIN, R. S.: Some topics in finite elasticity. Proc. 1st Symp. Naval Struct. Mech., Stanford Univ. 1958.
- [3] MURNAGHAN, F. D.: Finite Deformation of an Elastic Solid. New York: Wiley 1951.
- [4] TIMOSHENKO, S.: Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill 1940.
- [5] ERICKSEN, J. L., & C. TRUESDELL: Exact theory of stress and strain in rods and shells. Arch. Rational Mech. Anal. **1**, 295—323 (1958).
- [6] ADKINS, J. E., & R. S. RIVLIN: Large elastic deformations of isotropic materials, Part IX. Phil. Trans. Roy. Soc. A **244**, 505—531 (1952).
- [7] GREEN, A. E., R. S. RIVLIN & R. T. SHIELD: General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations. Proc. Roy. Soc. A **211**, 128—154 (1952).
- [8] ZIEGLER, H.: Linear elastic stability. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **4**, 1—50 (1953).
- [9] FUNG, Y. C., E. E. SECHLER & A. KAPLAN: On the vibration of thin cylindrical shells under internal pressure. J. Aero. Sci. **24**, 650—660 (1957).
- [10] RIVLIN, R. S., & D. W. SAUNDERS: Large elastic deformations of isotropic materials, Part VII. Phil. Trans. Roy. Soc. A **243**, 251—298 (1951).

Division of Applied Mathematics
Brown University
Providence, R. I.

(Received December 15, 1960)

Greensche Tensoren und asymptotische Gesetze der elektromagnetischen Hohlraumschwingungen

CLAUS MÜLLER und HORST NIEMEYER

Inhalt	Seite
Einleitung	305
§ 1. Problemstellung, Bezeichnungen	308
§ 2. Singularitäten und Symmetrien Greenscher Tensoren	309
§ 3. Existenz der Greenschen Tensoren	315
§ 4. Das Verhalten der kompensierenden Tensoren am Rand	323
§ 5. Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen	338
§ 6. Asymptotische Gesetze für Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen	343
Literatur	348

Einleitung

Es sei G ein Gebiet des dreidimensionalen euklidischen Raumes, das mit homogener und isotroper Materie erfüllt ist und von einer ideal leitenden Randfläche F begrenzt wird. Die Materialeigenschaften seien durch die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ festgelegt. Sind ε und μ positiv reell, so existieren abzählbar unendlich viele elektromagnetische Eigenschwingungen \mathfrak{E}_n , \mathfrak{H}_n und Eigenfrequenzen ω_n , die in G den (zeitunabhängigen) Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \times \mathfrak{H}_n + i \omega_n \varepsilon \mathfrak{E}_n = 0$$

$$\nabla \times \mathfrak{E}_n - i \omega_n \mu \mathfrak{H}_n = 0$$

und auf F der Randbedingung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_n = 0$ genügen. Dabei ist \mathfrak{n} der ins Äußere von G gerichtete Normalenvektor auf F .

Die in dieser Arbeit behandelten Fragen traten erstmalig im Zusammenhang mit der Planckschen Strahlungsformel auf, bei deren Ableitung angenommen wird, daß sich die Eigenschwingungen für hohe Frequenzen im Mittel in allen Punkten gleichartig verhalten. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Annahmen zu präzisieren und im Rahmen der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen streng zu beweisen.

Bei den Randbedingungen beschränken wir uns auf $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = 0$, da bei physikalischen Überlegungen diese Forderung bisher vorwiegend betrachtet wurde. Man kann jedoch erwarten, daß andere Randbedingungen, die heute gelegentlich in der Theorie der Hohlraumresonatoren auftreten, nach einem analogen Verfahren erfaßt werden können.

Für die Eigenfrequenzen ω_n ergibt sich das zuerst von H. WEYL [17], [18] aufgestellte asymptotische Gesetz¹

$$\sum_{0 < \omega_n < t} 1 \sim (\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \frac{V \cdot t^3}{3 \pi^2} \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

wobei V das Volumen des betrachteten Gebietes G ist.

Wir werden in dieser Arbeit über das Weylsche Gesetz hinaus für die durch

$$\frac{1}{\mu} \int_G \mathfrak{E}_n \overline{\mathfrak{E}}_m dV = \frac{1}{\varepsilon} \int_G \mathfrak{H}_n \overline{\mathfrak{H}}_m dV = \delta_{nm}$$

normierten Eigenschwingungen die asymptotischen Relationen

$$\begin{aligned} \sum_{0 < \omega_n < t} |\mathfrak{E}_n(\mathfrak{x})|^2 &\sim \mu (\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \frac{t^3}{3 \pi^2} \\ \sum_{0 < \omega_n < t} |\mathfrak{H}_n(\mathfrak{x})|^2 &\sim \varepsilon (\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \frac{t^3}{3 \pi^2} \end{aligned}$$

($\mathfrak{x} \in G$, $t \rightarrow \infty$) ableiten, aus denen sich das Weylsche Gesetz formal durch Integration über G ergibt. Diese Gesetze können als Formulierung der asymptotischen Ortsunabhängigkeit der Eigenschwingungen angesehen werden.

Für die skalare Helmholtzsche Schwingungsgleichung wurden analoge Gesetzmäßigkeiten von T. CARLEMAN [1], [2] mit Hilfe Tauberscher Sätze von HARDY und LITTLEWOOD bewiesen. Zur Anwendung der Carlemanschen Methode auf elektromagnetische Schwingungen ist es notwendig, Greensche Tensoren zu den Maxwellischen Gleichungen zu konstruieren und ihr Verhalten für große imaginäre Frequenzen zu untersuchen. Hierbei treten charakteristische Schwierigkeiten auf, da die Maxwellischen Gleichungen keine Grundlösungen besitzen, die wie $1/r$ singulär werden. Die als Grundlösungen anzusehenden Dipolfelder

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \Phi$$

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{x}) = i \omega \varepsilon \Phi \mathfrak{a} + \frac{i}{\omega \mu} \nabla_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{a} \nabla_{\mathfrak{x}} \Phi)$$

mit einem konstanten Vektor \mathfrak{a} und $\Phi = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r}$, $\mathbf{k}^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, $0 \leq \arg \mathbf{k} < \pi$, $r = |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|$ werden vielmehr wie $1/r^2$ bzw. $1/r^3$ singulär.

Die Übertragung der Idee der Greenschen Funktion auf Probleme elektromagnetischer Schwingungen ist vielfach diskutiert worden. Der hier gegebene Nachweis der Existenz von Greenschen Tensoren zu den Maxwellischen Gleichungen bezieht sich auf die Lösung des Randwertproblems, die der eine von uns 1952 gegeben hat [11], [12].

Wir beginnen daher in §§ 2 und 3 mit einer Untersuchung der Greenschen Tensoren

$$\mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \quad (i, k = 1, 2),$$

¹ $\sum_{0 < \omega_n < t} 1$ bedeutet die Anzahl der Eigenfrequenzen zwischen 0 und t .

d. h. dreireihigen Matrizen, deren Spaltenvektoren die homogenen Maxwellschen Gleichungen und die Randbedingung erfüllen. Mit ihrer Hilfe läßt sich auch das inhomogene System

$$\begin{aligned} V \times \mathfrak{G} + i\omega \varepsilon \mathfrak{E} &= \mathfrak{j} \\ V \times \mathfrak{E} - i\omega \mu \mathfrak{H} &= -\mathfrak{j}' \quad \text{in } G \\ n \times \mathfrak{E} &= 0 \quad \text{auf } F \end{aligned}$$

lösen, und zwar in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{3i\omega\varepsilon} \mathfrak{j} + \frac{1}{4\pi} \oint_G (\mathfrak{G}_{11} \mathfrak{j} + \mathfrak{G}_{12} \mathfrak{j}') dV \\ \mathfrak{H} &= \frac{1}{3i\omega\mu} \mathfrak{j}' + \frac{1}{4\pi} \oint_G (\mathfrak{G}_{21} \mathfrak{j} + \mathfrak{G}_{22} \mathfrak{j}') dV. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Integrale als Cauchysche Hauptwerte und die Produkte $\mathfrak{G}_{11} \mathfrak{j}$ usw. im Sinne des Matrizenkalküls zu verstehen.

Um den Anschluß an die Carlemansche Theorie zu gewinnen, behandeln wir auch den Fall $\omega=0$. Obwohl das System der Maxwellschen Gleichungen für $\omega=0$ zerfällt, gelingt es, durch stetige Ergänzung Greensche Tensoren in einem erweiterten Sinn zu konstruieren. Setzen wir $\varepsilon=\mu=1$ und bezeichnen mit $\mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau)$ die für $\omega=i\tau$ ($\tau \geq 0$) konstruierten Greenschen Tensoren, so ergeben sich für die Eigenschwingungen der Maxwellschen Gleichungen die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} (\omega_n^2 + \tau^2) \int_G \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau) \mathfrak{E}_n(\mathfrak{x}) dV_{\mathfrak{x}} &= 4\pi i\omega_n \mathfrak{H}_n(\mathfrak{y}) \\ (\omega_n^2 + \tau^2) \int_G \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau) \mathfrak{H}_n(\mathfrak{x}) dV_{\mathfrak{x}} &= 4\pi i\omega_n \mathfrak{E}_n(\mathfrak{y}). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich die Existenz von abzählbar unendlich vielen Eigenschwingungen beweisen.

Der Grundgedanke des Carlemanschen Verfahrens ist jedoch erst anwendbar, wenn wir von dem iterierten Tensor

$$\mathfrak{G}_E(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int_G \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 0) \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; i\tau) dV_{\mathfrak{z}}$$

ausgehen. Die Tensoren \mathfrak{G}_{12} und \mathfrak{G}_{21} werden wie $1/r^2$ singulär, der iterierte Tensor \mathfrak{G}_E jedoch nur wie $1/r$. Für ihn gilt die Bilinearentwicklung

$$\mathfrak{G}_E(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) - \mathfrak{G}_E(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau) = \tau^2 \sum_{\omega_n > 0} \frac{\mathfrak{E}_n(\mathfrak{x}) \bar{\mathfrak{E}}_n(\mathfrak{y})}{\omega_n^2 (\omega_n^2 + \tau^2)}$$

aus der die asymptotischen Relationen nach dem Verfahren von T. CARLEMAN folgen.

Bevor diese Überlegungen in §§5 und 6 ausgeführt werden, ist es jedoch erforderlich, Abschätzungen für die kompensierenden Tensoren zu gewinnen.

Die in §4 vorgenommenen Abschätzungen zeigen, daß die kompensierenden Tensoren nur dann singulär werden, wenn Aufpunkt und Quellpunkt gegen denselben Randpunkt von F streben. Analytisch läßt sich dies nach H. WEYL [17],

[19] durch den Begriff des „Lichtweges“ zwischen Aufpunkt und Quellpunkt fassen, also durch die Entfernung, die ein Lichtstrahl bei einmaliger Reflektion am Rand zurücklegt. Die kompensierenden Tensoren lassen sich durch Potenzen des Lichtweges zwischen Aufpunkt und Quellpunkt abschätzen.

§ 1. Problemstellung, Bezeichnungen

Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungsweisen der Vektoranalysis und der Matrizenrechnung nebeneinander. Dabei wollen wir uns Vektoren als Spaltenvektoren geschrieben denken. Das Transponieren von Matrizen und Vektoren deuten wir durch \sim an.

Das Skalarprodukt $a \sim b$ zweier Vektoren a und b werden wir jedoch auch mit $a \cdot b$ bezeichnen, wenn keine Mißverständnisse auftreten. Unter dem Spaltenvektor $a \times b$ verstehen wir das Vektorprodukt der Vektoren a und b , entsprechend unter $\nabla \times a$ die Rotation von a , usw.

Für die in dieser Arbeit benutzten Begriffe Divergenz und Rotation von Vektorfeldern legen wir nicht die üblichen differentiellen, sondern erweiterte, durch die physikalische Anschauung nahegelegte Definitionen zugrunde [11], [13].

Definition 1. Das Feld $v(x)$ sei in der Umgebung des Punktes x_0 stetig. Es sei G_v eine gegen x_0 konvergente Folge regulärer Gebiete¹ mit dem Volumen $\|G_v\|$ und der Randfläche F_v . Es sei ferner n der ins Äußere gerichtete Normalenvektor auf F_v . Existiert dann der Grenzwert

$$(1.1) \quad \lim_{G_v \rightarrow x_0} \frac{1}{\|G_v\|} \int_{F_v} (n \cdot v) dF$$

bzw.

$$(1.2) \quad \lim_{G_v \rightarrow x_0} \frac{1}{\|G_v\|} \int_{F_v} (n \times v) dF$$

unabhängig von der Wahl der Folge G_v , so stellt im Punkte x_0 der Grenzwert (1) $\nabla \cdot v$, der Grenzwert (2) $\nabla \times v$ dar.

Für stetig differenzierbare Felder stimmen diese Definitionen mit den üblichen differentiellen überein. Man kann jedoch zeigen, daß es stetige, aber nicht differenzierbare Felder gibt, für die eine Divergenz im üblichen Sinne nicht existiert, sondern nur eine Divergenz im Sinne der Definition 1. Da die bekannten Regeln der Vektoranalysis auch für die verallgemeinerten Begriffe Rotation und Divergenz gelten, ist es vorteilhaft, die Klasse der zugelassenen Felder zu erweitern und solche stetigen Felder in die Betrachtungen einzubeziehen, für die Divergenz oder Rotation nur im erweiterten Sinn vorhanden sind.

Es sei nun G ein endliches, reguläres Gebiet, das von der orientierbaren, zusammenhängenden, dreimal stetig differenzierbaren Randfläche F berandet wird. In G seien die Vektorfelder j, j' und ihre Divergenzen $\nabla \cdot j, \nabla \cdot j'$ definiert und stetig. Entsprechend dem in der Einleitung skizzierten Weg behandeln wir zunächst folgendes Problem:

¹ Zum Begriff reguläres Gebiet: [11], S. 20ff. Eine Folge regulärer Gebiete G_v mit $x_0 \in G_v$ und gegen Null strebenden Durchmessern „konvergiert gegen x_0 “.

Gesucht sind Felder $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ mit stetiger Rotation, die in G die Maxwell'schen Gleichungen

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathfrak{H} + i\omega \varepsilon \mathfrak{E} &= \mathfrak{j} \\ \nabla \times \mathfrak{E} - i\omega \mu \mathfrak{H} &= -\mathfrak{j}' \end{aligned}$$

mit komplexen Konstanten ε, μ erfüllen und auf F die Randbedingung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = 0$ befriedigen.

Die Konstanten ε und μ schreiben wir in der Form

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega}, \quad \mu = \mu_0 + \frac{i\sigma'}{\omega}.$$

Dabei ist ε_0 die Dielektrizitätskonstante, μ_0 die Permeabilität, σ die elektrische Leitfähigkeit, σ' die magnetische Leitfähigkeit des mit homogener und isotroper Materie erfüllten Gebietes G . Die Konstanten $\varepsilon_0, \mu_0, \sigma$ und σ' sind reell und es gilt

$$\varepsilon_0 > 0, \quad \mu_0 > 0, \quad \sigma \geq 0, \quad \sigma' \geq 0.$$

In den physikalisch realisierten Fällen ist $\sigma' = 0$. Die Frequenz ω schränken wir durch die Forderung $\text{Im } \omega \geq 0$ ein. Die Gln. (1.3) gehen aus den zeitabhängigen Maxwell'schen Gleichungen hervor, wenn alle Felder den zeitabhängigen Faktor $e^{i\omega t}$ enthalten.

Wir wollen diese Aufgabe mit Hilfe Greenscher Tensoren $\mathfrak{G}_{ik}(x, y)$ in der Form

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}(x) &= \frac{1}{3i\omega\varepsilon} \mathfrak{j}(x) + \frac{1}{4\pi} \oint_G [\mathfrak{G}_{11}(x, y) \mathfrak{j}(y) + \mathfrak{G}_{12}(x, y) \mathfrak{j}'(y)] dV_y \\ \mathfrak{H}(x) &= \frac{1}{3i\omega\mu} \mathfrak{j}'(x) + \frac{1}{4\pi} \oint_G [\mathfrak{G}_{21}(x, y) \mathfrak{j}(y) + \mathfrak{G}_{22}(x, y) \mathfrak{j}'(y)] dV_y \end{aligned}$$

lösen. Wie wir schon einleitend betont haben, können wir wegen der Singularitäten der Greenschen Tensoren die Integration nicht im gewöhnlichen Sinn durchführen, sondern nur im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes eines bestimmten Integrals. Wir benötigen daher

Definition 2. Ist die Funktion $f(x, y)$ im Gebiet G mit Ausnahme des Punktes $x=y$ ($y \in G$) überall stetig, so ist

$$(1.5) \quad \oint_G f(x, y) dV_x = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{G-K_r^r} f(x, y) dV_x$$

falls dieser Grenzwert existiert. Dabei bezeichnet K_r^r eine ganz in G gelegene Kugel vom Radius r um den Punkt y .

Ist $f(x, y)$ (uneigentlich) integrierbar in G , z.B. $|f(x, y)| = O(|x - y|^{-\alpha})$ mit $\alpha < 3$, so ist

$$\oint_G f(x, y) dV_x = \int_G f(x, y) dV_x.$$

§ 2. Singularitäten und Symmetrien Greenscher Tensoren

Wir gehen von einer Integraldarstellung der durch Volumenströme erzeugten elektromagnetischen Schwingungen aus, die uns die Greenschen Tensoren für den freien Raum liefert, und benutzen [11] (Lemma 49 dort).

Lemma 1. Im regulären Gebiet G seien $\mathbf{j}, \nabla \mathbf{j}, \mathbf{j}', \nabla \mathbf{j}'$ stetig. Mit $\nabla \mathbf{j} = i\omega \mathbf{q}$, $\nabla \mathbf{j}' = i\omega \mathbf{q}'$ und

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{i\kappa r}}{r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \kappa^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad 0 \leq \arg \kappa < \pi$$

werde das Feld

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_G \left[i\omega \mu \mathbf{j} \Phi - \mathbf{j}' \times \nabla_{\mathbf{y}} \Phi + \frac{\mathbf{q}}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \Phi \right] dV_{\mathbf{y}} + \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \int_F (\mathbf{j} \mathbf{n}) \nabla_{\mathbf{y}} \Phi dF_{\mathbf{y}} \\ \mathfrak{H}^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_G \left[i\omega \varepsilon \mathbf{j}' \Phi + \mathbf{j} \times \nabla_{\mathbf{y}} \Phi + \frac{\mathbf{q}'}{\mu} \nabla_{\mathbf{y}} \Phi \right] dV_{\mathbf{y}} + \frac{i}{4\pi\omega\mu} \int_F (\mathbf{j}' \mathbf{n}) \nabla_{\mathbf{y}} \Phi dF_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

gebildet.

Dann gilt in den inneren Punkten von G

$$\nabla \times \mathfrak{H}^* + i\omega \varepsilon \mathfrak{E}^* = \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathfrak{E}^* - i\omega \mu \mathfrak{H}^* = -\mathbf{j}',$$

während in den äußeren Punkten

$$\nabla \times \mathfrak{H}^* + i\omega \varepsilon \mathfrak{E}^* = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathfrak{E}^* - i\omega \mu \mathfrak{H}^* = \mathbf{0}$$

erfüllt wird. Ist außerdem auf der Randfläche F

$$(\mathbf{n} \mathbf{j}) = (\mathbf{n} \mathbf{j}') = 0,$$

so sind \mathfrak{E}^* und \mathfrak{H}^* in allen Punkten stetig.

Wir schreiben die Felder Gl. (2.1) in eine unseren Zwecken besser angepaßte Form und beweisen:

Lemma 2. Es ist

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{3i\omega\varepsilon} \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_G [\mathfrak{G}_{11}^* \mathbf{j}(\mathbf{y}) + \mathfrak{G}_{12}^* \mathbf{j}'(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} \\ \mathfrak{H}^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{3i\omega\mu} \mathbf{j}'(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_G [\mathfrak{G}_{21}^* \mathbf{j}(\mathbf{y}) + \mathfrak{G}_{22}^* \mathbf{j}'(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

wobei die Tensoren $\mathfrak{G}_{ik}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ durch die Forderung bestimmt sind, daß für jeden konstanten Vektor \mathbf{a}

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{G}_{11}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a} &= i\omega \mu \Phi \mathbf{a} + \frac{i}{\omega \varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{a} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) \\ \mathfrak{G}_{21}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a} &= \nabla_{\mathbf{x}} \Phi \times \mathbf{a} \\ \mathfrak{G}_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a} &= -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi \times \mathbf{a} \\ \mathfrak{G}_{22}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a} &= i\omega \varepsilon \Phi \mathbf{a} + \frac{i}{\omega \mu} \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{a} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) \end{aligned}$$

ist.

Man erkennt hier, daß die beiden ersten Ausdrücke das elektrische bzw. magnetische Feld eines infinitesimalen elektrischen Dipols vom Moment \mathbf{a} an der Stelle \mathbf{y} darstellen, die beiden letzten Ausdrücke entsprechend das elektrische bzw. magnetische Feld eines magnetischen Dipols.

Zum Beweis von Lemma 2 betrachten wir

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \int_G (\varrho V_{\eta} \Phi) dV_{\eta} &= \frac{i}{\omega} V_{\xi} \int_G (V_{\eta}) \Phi dV_{\eta} \\ &= \frac{i}{\omega} V_{\xi} \left[\int_F (\eta) \Phi dF_{\eta} + \int_G (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} \right]. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$(2.5) \quad \int_G \frac{\varrho}{\varepsilon} V_{\eta} \Phi dV_{\eta} + \frac{i}{\omega \varepsilon} \int_F (\eta) V_{\eta} \Phi dF_{\eta} = \frac{i}{\omega \varepsilon} V_{\xi} \int_G (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta},$$

und es bleibt lediglich die Relation

$$(2.6) \quad V_{\xi} \int_G (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} = -\frac{4\pi}{3} i(\xi) + \int_G V_{\xi} (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta}$$

nachzuweisen¹. Dazu legen wir um den inneren Punkt $\xi_0 \in G$ eine Kugel $K_{\xi_0}^{\tau}$ vom Radius τ , die noch ganz in G enthalten ist, und bilden mit $|\xi - \xi_0| < \frac{\tau}{2}$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} V_{\xi} \int_G (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} &= V_{\xi} \int_{G-K_{\xi_0}^{\tau}} (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} + V_{\xi} \int_{K_{\xi_0}^{\tau}} (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} \\ &= \int_{G-K_{\xi_0}^{\tau}} V_{\xi} (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} - V_{\xi} \int_{K_{\xi_0}^{\tau}} (\eta V_{\eta} \Phi) dV_{\eta} \\ &= \int_{G-K_{\xi_0}^{\tau}} V_{\xi} (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} - V_{\xi} \int_{|\eta-\xi_0|=\tau} (\eta) \Phi dF_{\eta} + V_{\xi} \int_{K_{\xi_0}^{\tau}} (V_{\eta}) \Phi dV_{\eta} \\ &= \int_{G-K_{\xi_0}^{\tau}} V_{\xi} (\eta V_{\xi} \Phi) dV_{\eta} + \int_{|\eta-\xi_0|=\tau} (\eta) V_{\eta} \Phi dF_{\eta} + \int_{K_{\xi_0}^{\tau}} (V_{\eta}) (V_{\xi} \Phi) dV_{\eta}. \end{aligned}$$

Setzen wir nunmehr $\xi = \xi_0$ und lassen $\tau \rightarrow 0$ streben, so folgt wegen

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{|\eta-\xi_0|=\tau} (\eta) V_{\eta} \Phi dF_{\eta} = -\frac{4\pi}{3} i(\xi_0)$$

und

$$\left| \int_{K_{\xi_0}^{\tau}} (V_{\eta}) V_{\xi} \Phi dV_{\eta} \right| = O(\tau)$$

die Behauptung Gl. (2.6).

Wir können nach Lemma 2 die Tensoren \mathfrak{G}_{ik}^* als Greensche Tensoren für den ganzen Raum auffassen. Mit ihrer Hilfe können wir nun auch die Greenschen Tensoren eines endlichen Gebietes definieren.

Definition 3. Es sei ω keine Eigenfrequenz des Gebietes G . Die Tensoren $\mathfrak{G}_{ik}(\xi, \eta)$ heißen Greensche Tensoren des Gebietes G , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $[\mathfrak{G}_{ik}(\xi, \eta) - \mathfrak{G}_{ik}^*(\xi, \eta)]$ ist in jeder Komponente als Funktion von ξ stetig differenzierbar in G .

¹ [10], S. 35 ff.

2. Mit jedem konstanten Vektor \mathbf{a} erfüllen die Felder $\mathfrak{G}_{1k}\mathbf{a}$ und $\mathfrak{G}_{2k}\mathbf{a}$ als Funktionen von \mathfrak{x} in G für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}$ die homogenen Maxwellschen Gleichungen, d.h.

$$\nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{G}_{1k}\mathbf{a} - i\omega\mu\mathfrak{G}_{2k}\mathbf{a} = 0$$

$$\nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{G}_{2k}\mathbf{a} + i\omega\varepsilon\mathfrak{G}_{1k}\mathbf{a} = 0.$$

3. Es gelten die Randbedingungen

$$\mathbf{n} \times (\mathfrak{G}_{1k}\mathbf{a}) = 0$$

auf F , ($k = 1, 2$).

Bevor wir in §3 die Existenz und Eindeutigkeit der Greenschen Tensoren beweisen, wollen wir einige allgemeine Eigenschaften der Greenschen Tensoren herausstellen. Wir werden diese Eigenschaften bei dem Existenznachweis nicht benötigen.

Satz 1. Die Greenschen Tensoren erfüllen die Symmetriebeziehungen

$$\mathfrak{G}_{11}^{\sim}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{G}_{11}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$$

$$\mathfrak{G}_{12}^{\sim}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = -\mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$$

$$\mathfrak{G}_{22}^{\sim}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{G}_{22}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}).$$

Zum Beweis von Satz 1 wollen wir zunächst zwei Hilfssätze herleiten. Es sei $F_{\mathfrak{y}}^r$ die Fläche einer Kugel von Radius r um den Punkt \mathfrak{y} , \mathbf{n} der ins Innere gerichteten Normalenvektor, \mathbf{a} ein beliebiger konstanter Vektor und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein stetiges Vektorfeld bzw. ein Feld mit stetiger Rotation. Dann gilt:

Lemma 3.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\mathfrak{y}}^r} \mathbf{n} [\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \times (\nabla_{\mathfrak{x}} \Phi \times \mathbf{a})] dF_{\mathfrak{x}} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{a} \mathfrak{f}(\mathfrak{y}).$$

Lemma 4.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\mathfrak{y}}^r} \mathbf{n} [\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times (\nabla_{\mathfrak{x}} \Phi \times \mathbf{a})] dF_{\mathfrak{x}} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} (\nabla \times \mathfrak{f})(\mathfrak{y}).$$

Beweis zu Lemma 3. Es ist ($' = d/dr$)

$$(2.8) \quad \nabla_{\mathfrak{x}} \Phi = - \left(\frac{e^{i\mathfrak{k}r}}{r} \right)' \mathbf{n},$$

folglich

$$(2.9) \quad \int_{F_{\mathfrak{y}}^r} \mathbf{n} [\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \times (\nabla_{\mathfrak{x}} \Phi \times \mathbf{a})] dF_{\mathfrak{x}} = \left(\frac{e^{i\mathfrak{k}r}}{r} \right)' \int_{F_{\mathfrak{y}}^r} [(\mathbf{n} \mathbf{a}) (\mathbf{n} \mathfrak{f}) - \mathbf{a} \mathfrak{f}] dF_{\mathfrak{x}},$$

und wir erhalten

$$(2.10) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{e^{i\mathfrak{k}r}}{r} \right)' \int_{F_{\mathfrak{y}}^r} (\mathbf{a} \mathfrak{f}) dF_{\mathfrak{x}} = -4\pi \mathbf{a} \mathfrak{f}(\mathfrak{y}),$$

$$(2.11) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{e^{i\mathfrak{k}r}}{r} \right)' \int_{F_{\mathfrak{y}}^r} (\mathbf{n} \mathbf{a}) (\mathbf{n} \mathfrak{f}) dF_{\mathfrak{x}} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{F_{\mathfrak{y}}^r} (\mathbf{n} \mathbf{a}) (\mathbf{n} \mathfrak{f}) dF_{\mathfrak{x}} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \mathfrak{f}(\mathfrak{y}).$$

Beweis zu Lemma 4.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\eta}^r} n[\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times (\mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \Phi \times \mathfrak{a})] dF_{\mathfrak{k}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\eta}^r} n[\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} (\mathfrak{a} \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \Phi)] dF_{\mathfrak{k}} \\
 (2.12) \qquad &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(\frac{e^{i\mathfrak{k}r}}{r} \right)' \int_{F_{\eta}^r} (n \times \mathfrak{f}(\mathfrak{x})) \mathfrak{a} dF_{\mathfrak{k}} \\
 &= \frac{4\pi}{3} \mathfrak{a} (\mathcal{V} \times \mathfrak{f})(\eta).
 \end{aligned}$$

Zum Beweis von Satz 1 bilden wir nunmehr mit konstanten Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g}_{ik} &= \mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \eta) \mathfrak{a}, & \eta \in G, & \quad \eta \notin F, \\
 \mathfrak{g}_{lm}^* &= \mathfrak{G}_{lm}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) \mathfrak{b}, & \mathfrak{z} \in G, & \quad \mathfrak{z} \notin F, \quad \mathfrak{z} \neq \eta,
 \end{aligned}
 \quad (2.13)$$

und betrachtet den Ausdruck

$$\int_{G - K_{\eta}^r - K_{\mathfrak{z}}^r} [\mathfrak{g}_{ik} \cdot \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{lm}^* - \mathfrak{g}_{lm}^* \cdot \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{ik}] dV_{\mathfrak{k}}.
 \quad (2.14)$$

Da der Integrand wegen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{ik} &= \omega^2 \varepsilon \mu \mathfrak{g}_{ik} = \mathfrak{K}^2 \mathfrak{g}_{ik} \\
 \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{lm}^* &= \omega^2 \varepsilon \mu \mathfrak{g}_{lm}^* = \mathfrak{K}^2 \mathfrak{g}_{lm}^*
 \end{aligned}
 \quad (2.15)$$

verschwindet, erhalten wir nach dem Gaußschen Satz

$$0 = \int_{F + F_{\eta}^r + F_{\mathfrak{z}}^r} n[\mathfrak{g}_{lm}^* \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{ik} - \mathfrak{g}_{ik} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{lm}^*] dF_{\mathfrak{k}}.
 \quad (2.16)$$

Setzen wir $i=l=1$, so folgt aus der Randbedingung

$$n \times \mathfrak{g}_{1k} = n \times \mathfrak{g}_{1m}^* = 0 \quad \text{auf } F,
 \quad (2.17)$$

$$0 = \int_{F_{\eta}^r + F_{\mathfrak{z}}^r} n[\mathfrak{g}_{1m}^* \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{1k} - \mathfrak{g}_{1k} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{1m}^*] dF_{\mathfrak{k}}.
 \quad (2.18)$$

Für $k=m=1$ ergibt sich als Grenzwert für $r \rightarrow 0$ nach Lemma 3 und 4

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\eta}^r} n[\mathfrak{g}_{11}^* \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{11} - \mathfrak{g}_{11} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{11}^*] dF_{\mathfrak{k}} \\
 = i\omega \mu \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\eta}^r} n[\mathfrak{g}_{11}^* \times (\mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \Phi \times \mathfrak{a})] dF_{\mathfrak{k}} + \\
 + \frac{i}{\omega \varepsilon} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\eta}^r} n[(\mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{11}^*) \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times (\mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \Phi \times \mathfrak{a})] dF_{\mathfrak{k}} \\
 = \frac{8\pi}{3} i\omega \mu (\mathfrak{a} \mathfrak{g}_{11}^*) + \frac{i}{\omega \varepsilon} \cdot \frac{4\pi}{3} \mathfrak{a} \cdot \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{11}^* \\
 = 4\pi i\omega \mu (\mathfrak{a} \mathfrak{g}_{11}^*),
 \end{aligned}
 \quad (2.19)$$

ferner entsprechend

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\mathfrak{z}}^r} n[\mathfrak{g}_{11}^* \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{11} - \mathfrak{g}_{11} \times \mathcal{V}_{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{g}_{11}^*] dF_{\mathfrak{k}} = -4\pi i\omega \mu \mathfrak{b} \mathfrak{g}_{11}.
 \quad (2.20)$$

Aus Gl. (18) folgt

$$(2.21) \quad a \sim \mathfrak{G}_{11}(\eta, \beta) \, b = b \sim \mathfrak{G}_{11}(\beta, \eta) \, a.$$

Gl. (21) gilt für beliebige Vektoren a, b , es ist daher

$$(2.22) \quad \mathfrak{G}_{11}^{\sim}(\eta, \beta) = \mathfrak{G}_{11}(\beta, \eta).$$

Setzen wir in Gl. (18) $k = m = 2$, so erhalten wir analog durch den Grenzübergang $r \rightarrow 0$

$$(2.23) \quad \mathfrak{G}_{22}^{\sim}(\eta, \beta) = \mathfrak{G}_{22}(\beta, \eta),$$

und für $k=1, m=2$ folgt aus Gl. (18) schließlich

$$(2.24) \quad \mathfrak{G}_{12}^{\sim}(\eta, \beta) = -\mathfrak{G}_{21}(\beta, \eta).$$

Auf ähnliche Weise läßt sich folgendes Resultat gewinnen:

Satz 2. Ist \mathcal{K} reell oder rein imaginär, d. h. $\mathcal{K}^2 = \omega^2 \varepsilon \mu = \mathcal{K}^2$, so ist

$$\overline{\mathfrak{G}_{12}}(\mathfrak{x}, \eta) = \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \eta)$$

$$\overline{\mathfrak{G}_{21}}(\mathfrak{x}, \eta) = \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{x}, \eta)$$

$$\omega \varepsilon \mathfrak{G}_{11}(\mathfrak{x}, \eta) = -\overline{\omega \varepsilon \mathfrak{G}_{11}}(\mathfrak{x}, \eta)$$

$$\omega \mu \mathfrak{G}_{22}(\mathfrak{x}, \eta) = -\overline{\omega \mu \mathfrak{G}_{22}}(\mathfrak{x}, \eta),$$

die Tensoren $\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{21}$ sind in diesem Fall also reell, die Tensoren $\omega \varepsilon \mathfrak{G}_{11}$ und $\omega \mu \mathfrak{G}_{22}$ rein imaginär.

Beweis. Es ist wegen Gl. (15)

$$(2.25) \quad \int_{G-K_0^r-K_3^r} [\mathfrak{g}_{ik} \cdot \mathcal{V}_k \times \mathcal{V}_k \times \overline{\mathfrak{g}_{lm}^*} - \overline{\mathfrak{g}_{lm}^*} \cdot \mathcal{V}_k \times \mathcal{V}_k \times \mathfrak{g}_{ik}] dV_k = (\mathcal{K}^2 - \mathcal{K}^2) \int_{G-K_0^r-K_3^r} (\mathfrak{g}_{ik} \overline{\mathfrak{g}_{lm}^*}) dV_k = 0,$$

und für $i=l=1$ folgt unter Beachtung der Randbedingungen

$$(2.26) \quad 0 = \int_{F_0^r + F_3^r} n [\overline{\mathfrak{g}_{1m}^*} \times \mathcal{V}_k \times \mathfrak{g}_{1k} - \mathfrak{g}_{1k} \times \mathcal{V}_k \times \overline{\mathfrak{g}_{1m}^*}] dF_k.$$

Berücksichtigen wir nun, daß analog zu Lemma 3 und 4

$$(2.27) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_0^r} n [\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \times (\mathcal{V}_k \overline{\Phi} \times a)] dF_k = \frac{8\pi}{3} a \mathfrak{f}(\eta),$$

$$(2.28) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_0^r} n [\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \times \mathcal{V}_k \times (\mathcal{V}_k \overline{\Phi} \times a)] dF_k = \frac{4\pi}{3} a (\mathcal{V} \times \mathfrak{f})(\eta)$$

gilt, so erhalten wir zunächst im Fall $k=1, m=2$

$$(2.29) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_0^r} n [\overline{\mathfrak{g}_{12}^*} \times \mathcal{V}_k \times \mathfrak{g}_{11} - \mathfrak{g}_{11} \times \mathcal{V}_k \times \overline{\mathfrak{g}_{12}^*}] dF_k = 4\pi i \omega \mu a \overline{\mathfrak{g}_{12}^*},$$

$$(2.30) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_3^r} n [\overline{\mathfrak{g}_{12}^*} \times \mathcal{V}_k \times \mathfrak{g}_{11} - \mathfrak{g}_{11} \times \mathcal{V}_k \times \overline{\mathfrak{g}_{12}^*}] dF_k = 4\pi b (\mathcal{V}_k \times \mathfrak{g}_{11}),$$

d. h. es gilt

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{G}_{12}}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) &= -\mathfrak{G}_{21}^{\sim}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \\ \overline{\mathfrak{G}_{21}}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) &= \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir für $k=m=1$ und $k=m=2$ die beiden anderen Behauptungen.

§ 3. Existenz der Greenschen Tensoren

Wir wollen in diesem Abschnitt die Existenz der Greenschen Tensoren mit den in § 2 geforderten Eigenschaften nachweisen, falls ω keine Eigenfrequenz unseres Randwertproblems ist, d. h. falls es keine von Null verschiedenen und im abgeschlossenen Bereich \overline{G} stetige Lösungen („Eigenschwingungen“) \mathfrak{E} , \mathfrak{H} des homogenen Systems

$$V \times \mathfrak{E} - i\omega \mu \mathfrak{H} = 0$$

$$V \times \mathfrak{H} + i\omega \varepsilon \mathfrak{E} = 0$$

$$n \times \mathfrak{E} = 0 \quad \text{auf } F$$

gibt.

Wir zeigen zunächst ([11], S. 349)

Satz 3. *Eigenfrequenzen treten nur dann auf, wenn ε und μ reell sind. Die Eigenfrequenzen sind ebenfalls reell.*

Zum Beweis nehmen wir an, \mathfrak{E} , \mathfrak{H} seien Eigenschwingungen und bilden

$$(3.1) \quad \int_G V(\mathfrak{E} \times \overline{\mathfrak{H}}) dV = \int_F n(\mathfrak{E} \times \overline{\mathfrak{H}}) dF.$$

Es folgt

$$(3.2) \quad 0 = \int_G (\overline{\omega} \varepsilon \overline{\mathfrak{E}} \mathfrak{E} - \omega \mu \overline{\mathfrak{H}} \mathfrak{H}) dV,$$

und mit $\omega = \omega_0 + i\omega_1$ durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$(3.3) \quad \int_G (\mu_0 \overline{\mathfrak{H}} \mathfrak{H}) dV = \int_G (\varepsilon_0 \overline{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}) dV,$$

$$(3.4) \quad 0 = \int_G [(\sigma' + \omega_1 \mu_0) \overline{\mathfrak{H}} \mathfrak{H} + (\sigma + \omega_1 \varepsilon_0) \overline{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}] dV.$$

Die Größen $\sigma, \sigma', \omega_1, \varepsilon_0, \mu_0$ hatten wir als nicht negativ angenommen. Gl. (3.4) kann daher nur bestehen, falls $\sigma = \sigma' = \omega_1 = 0$ ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Wir setzen nunmehr voraus, ω sei keine Eigenfrequenz, und wollen die Existenz der Tensoren

$$\mathfrak{R}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \mathfrak{G}_{ik}^*(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

nachweisen, die als die kompensierenden Anteile der Greenschen Tensoren nach Definition 3 folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\mathfrak{R}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist in jeder Komponente als Funktion von \mathfrak{x} stetig differenzierbar in G .

2. Die Felder $\mathfrak{R}_{1k}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})a$ und $\mathfrak{R}_{2k}a$ erfüllen als Funktion von \mathfrak{x} überall in G die homogenen Maxwell'schen Gleichungen, d. h.

$$(3.5) \quad \begin{aligned} V_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{R}_{1k}a - i\omega \mu \mathfrak{R}_{2k}a &= 0 \\ V_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{R}_{2k}a + i\omega \varepsilon \mathfrak{R}_{1k}a &= 0 \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

3. Es gelten auf F die Randbedingungen

$$(3.6) \quad n \times \mathfrak{R}_{11} a = -n(x') \times \left[i\omega \mu \Phi a + \frac{i}{\omega \varepsilon} V_{\xi'}(a V_{\xi'} \Phi) \right],$$

$$(3.7) \quad n \times \mathfrak{R}_{12} a = n(x') \times [V_{\xi'} \Phi \times a],$$

$$x' \in F, \quad y \in G, \quad y \notin F.$$

Die Frage nach der Existenz der Tensoren $\mathfrak{R}_{ik}(x, y)$ ist mithin ein typisches Innenraumproblem, das wir allgemein so formulieren können:

Gesucht sind Felder $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$, die in G stetig sind, stetige Rotation besitzen, den Gleichungen

$$V \times \mathfrak{H} + i\omega \varepsilon \mathfrak{E} = 0, \quad V \times \mathfrak{E} - i\omega \mu \mathfrak{H} = 0$$

genügen und auf F die Randbedingung

$$(3.8) \quad n \times \mathfrak{E} = g$$

erfüllen, wobei g ein vorgegebenes, differenzierbares Flächenfeld auf F ist, dessen Ableitungen hölderstetig sind. Die Lösung des Innenraumproblems und des entsprechenden Außenraumproblems ist in einer Arbeit des einen von uns ([12], [11], S. 317 ff.), gegeben worden. Wir wollen hier die Ergebnisse insoweit beschreiben, als wir sie später noch benötigen werden. Die Lösungsfelder $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ können danach durch ein Flächenfeld f auf F erzeugt werden, das ebenfalls hölderstetige Ableitungen und damit auch eine hölderstetige Flächendivergenz $V_0 f = i\omega \rho_0$ besitzt.

Die Felder

$$(3.9) \quad \mathfrak{E}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_F (f(y) \times V_y \Phi) dF_y$$

$$\mathfrak{H}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left(i\omega \varepsilon \Phi f + \frac{\rho_0}{\mu} V_y \Phi \right) dF_y$$

erfüllen unter den genannten Voraussetzungen über f für alle $x \notin F$ die homogenen Maxwellschen Gleichungen, außerdem existieren bei Annäherung an die Fläche F die Grenzwerte $\mathfrak{E}_{\rightarrow i}$ und $\mathfrak{H}_{\rightarrow i}$, und es gilt ($x' \in F$)

$$(3.10) \quad n \times \mathfrak{E}_{\rightarrow i}(x') = \frac{1}{2} f(x') - \frac{1}{4\pi} \int_F n(x') \times (f(y) \times V_y \Phi) dF_y.$$

Für das erzeugende Feld f erhalten wir also die Integralgleichung

$$(3.11) \quad f(x') - \frac{1}{2\pi} \int_F n(x') \times (f(y) \times V_y \Phi) dF_y = 2g(x')$$

symbolisch

$$(E - M) f = 2g.$$

Führen wir als Norm des Elementes f

$$(3.12) \quad \|f\| = \sup_{x' \in F} |f(x')|$$

ein, so ist die Transformation M im Banach-Raum aller stetigen Flächenfelder auf F vollstetig. Gl. (11) ist daher für alle g eindeutig lösbar, falls die homogene

Gleichung

$$(3.13) \quad (E - M) \mathfrak{f}_0 = 0$$

keine nicht-trivialen Lösungen besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn ω keine Eigenfrequenz ist. Unter den angegebenen Voraussetzungen über F und g sind die Lösungen der Gl. (11) hölderstetig differenzierbar. Damit ist die Annahme der Randwerte garantiert. Die Felder $\mathfrak{R}_{ik}a$ sind auch eindeutig bestimmt, falls ω kein Eigenwert ist. Es ergibt sich also:

Satz 4. *Ist ω keine Eigenfrequenz des Randwertproblems, so existieren die Tensoren $\mathfrak{R}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bzw. $\mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit den in Definition 3 angegebenen Eigenschaften. Sie sind eindeutig bestimmt.*

Wir wollen zum Abschluß dieses Paragraphen den bisher aus unseren Betrachtungen ausgeschlossenen Fall $\omega=0$ diskutieren und zeigen, daß auch in diesem Fall Greensche Tensoren in einem erweiterten Sinn existieren. Formales Einsetzen von $\omega=0$ in Definition 3 ergibt keine sinnvollen Relationen, da schon die singulären Anteile $\mathfrak{G}_{11}^*(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und $\mathfrak{G}_{22}^*(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Tensoren \mathfrak{G}_{11} und \mathfrak{G}_{22} für $\omega=0$ nicht existieren. Wohl aber besitzen die Ausdrücke $\omega \mathfrak{G}_{11}^*$ und $\omega \mathfrak{G}_{22}^*$ für $\omega \rightarrow 0$ einen Sinn. Die definierenden Eigenschaften der ausgearteten Greenschen Tensoren für $\omega=0$, die wir mit $\mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0)$ bezeichnen wollen, können wir uns so erhalten denken, daß für $\omega \rightarrow 0$ die Tensoren \mathfrak{G}_{12} und \mathfrak{G}_{21} gegen die entsprechenden ausgearteten Tensoren streben, während bei den Tensoren \mathfrak{G}_{11} und \mathfrak{G}_{22} die Ausdrücke $\omega \mathfrak{G}_{11}$ und $\omega \mathfrak{G}_{22}$ gegen die entsprechenden ausgearteten Tensoren streben. Wir bilden daher

Definition 4. *Als ausgeartete Tensoren zur Frequenz $\omega=0$ bezeichnen wir Tensoren $\mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. Die Felder

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{R}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) a &= \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) a + \nabla_{\mathfrak{x}} \frac{1}{r} \times a \\ \mathfrak{R}_{21}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) a &= \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) a - \nabla_{\mathfrak{x}} \frac{1}{r} \times a \\ \mathfrak{R}_{kk}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) a &= \mathfrak{G}_{kk}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) a - \epsilon \nabla_{\mathfrak{x}} \left(a \nabla_{\mathfrak{x}} \frac{1}{r} \right) \\ (k &= 1, 2; \quad r = |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|) \end{aligned}$$

sind bei konstantem a stetig differenzierbar in G .

2. Sie erfüllen in G die Differentialgleichungen

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{R}_{12} a &= \epsilon \mathfrak{R}_{22} a, & \nabla_{\mathfrak{x}} \mathfrak{R}_{12} a &= 0 \\ \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{R}_{22} a &= 0 \\ \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{R}_{21} a &= -\epsilon \mathfrak{R}_{11} a, & \nabla_{\mathfrak{x}} \mathfrak{R}_{21} a &= 0 \\ \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{R}_{11} a &= 0. \end{aligned}$$

3. Es gelten die Randbedingungen

$$(3.16) \quad \begin{aligned} n \times \mathfrak{G}_{12} a &= 0, & n \cdot \mathfrak{G}_{21} a &= 0 \\ n \times \mathfrak{G}_{11} a &= 0 \quad \text{auf } F. \end{aligned}$$

Wir wollen Existenz und Eindeutigkeit auch dieser ausgearbeiteten Tensoren nachweisen und beweisen zunächst:

Lemma 5. *Die Integralgleichung*

$$(3.17) \quad \mathfrak{k}(\mathfrak{x}') = \frac{\lambda}{2\pi} \int_F \mathfrak{n}(\mathfrak{x}') \times \left(\mathfrak{k}(\mathfrak{y}) \times \nabla_{\mathfrak{y}} \frac{1}{r} \right) dF_{\mathfrak{y}} \quad (r = |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|)$$

besitzt für $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ und für $|\lambda| \leq 1$ keine Eigenlösungen.

Zum Beweis betrachten wir das mit einer Lösung $\mathfrak{k}(\mathfrak{x}')$ der Integralgleichung (17) gebildete Feld

$$(3.18) \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_F \left(\mathfrak{k}(\mathfrak{y}) \times \nabla_{\mathfrak{y}} \frac{1}{r} \right) dF_{\mathfrak{y}}.$$

Es gelten die „Sprungrelationen“ [11]

$$(3.19) \quad \mathfrak{n} \times \mathfrak{G}_{\rightarrow i}(\mathfrak{x}') = \frac{1-\lambda}{2} \mathfrak{k}(\mathfrak{x}'), \quad \mathfrak{n} \times \mathfrak{G}_{\rightarrow a}(\mathfrak{x}') = \frac{1+\lambda}{2} \mathfrak{k}(\mathfrak{x}'),$$

wobei der Index i Annäherung an F von innen, der Index a Annäherung an F von außen bedeutet. Wegen

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = \frac{\lambda}{4\pi} \nabla_{\mathfrak{x}} \times \int_F \mathfrak{k}(\mathfrak{y}) \cdot \frac{1}{r} dF_{\mathfrak{y}}$$

gilt ferner

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathfrak{G} &= -\frac{\lambda}{4\pi} \nabla_{\mathfrak{x}} \int_F \mathfrak{k}(\mathfrak{y}) \nabla_{\mathfrak{y}} \frac{1}{r} dF_{\mathfrak{y}} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi} \int_F (\nabla_0 \mathfrak{k}) \nabla_{\mathfrak{y}} \frac{1}{r} dF_{\mathfrak{y}} = \mathfrak{H}(\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

und wir erhalten folgende Relationen

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathfrak{G} &= \mathfrak{H} \\ \nabla \times \mathfrak{H} &= 0, \quad \mathfrak{H}_{\rightarrow i} - \mathfrak{H}_{\rightarrow a} = \lambda \mathfrak{n}(\mathfrak{x}') \nabla_0 \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Nunmehr bilden wir die Ausdrücke

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \int_{G_i} \nabla (\mathfrak{G} \times \nabla \times \overline{\mathfrak{G}}) dV &= \int_{G_i} |\nabla \times \mathfrak{G}|^2 dV \\ &= \int_F (\mathfrak{n} \times \mathfrak{G}_{\rightarrow i}) (\nabla \times \overline{\mathfrak{G}}_{\rightarrow i}) dF, \\ \int_{G_i} |\nabla \times \mathfrak{G}|^2 dV &= \frac{1-\lambda}{2} \int_F \mathfrak{k} \overline{\mathfrak{H}}_{\rightarrow i} dF. \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir

$$(3.23) \quad \int_{G_a} |\nabla \times \mathfrak{G}|^2 dV = -\frac{1+\lambda}{2} \int_F \mathfrak{k} \overline{\mathfrak{H}}_{\rightarrow a} dF.$$

Hierbei haben wir zu berücksichtigen, daß für

$$|\mathfrak{x}| = R \rightarrow \infty: \quad |\mathfrak{G}| = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad |\nabla \times \mathfrak{G}| = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

ist. Zunächst erstrecken wir daher das Volumenintegral über den Außenraum G_a mit der Einschränkung $|\mathfrak{x}| \leq R$ und erhalten (bei genügend großem R) zusätzlich ein Randintegral über die Kugeloberfläche $|\mathfrak{x}| = R$. Dieses verschwindet aber für $R \rightarrow \infty$ wie $O(1/R^2)$. Nunmehr erhalten wir aus Gl. (22, 23)

$$(3.24) \quad (1 + \bar{\lambda}) \int_{G_i} |\nabla \times \mathfrak{E}|^2 dV + (1 - \lambda) \int_{G_a} |\nabla \times \mathfrak{E}|^2 dV = 0.$$

Ist $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ oder $|\lambda| \leq 1$, so folgt unmittelbar $\nabla \times \mathfrak{E} \equiv 0$ in G_i und G_a . Ist $\lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$, so verschwindet $\nabla \times \mathfrak{E}$ in $\begin{cases} G_i \\ G_a \end{cases}$.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall ($|\lambda| < 1$ oder $\text{Im}(\lambda) \neq 0$). Hier ergibt sich aus $\mathfrak{H} \equiv 0$ sofort $\nabla_0 \mathfrak{E} \equiv 0$ oder

$$(3.25) \quad \int_F \mathfrak{E}(\mathfrak{y}) \nabla_{\mathfrak{y}} \frac{1}{r} dF_{\mathfrak{y}} \equiv 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{v} = \frac{\lambda}{4\pi} \int_F \mathfrak{E}(\mathfrak{y}) \cdot \frac{1}{r} dF_{\mathfrak{y}},$$

so ist

$$(3.26) \quad \mathfrak{E} = \nabla \times \mathfrak{v}, \quad \nabla \mathfrak{v} = 0, \quad \Delta \mathfrak{v} = 0.$$

Bilden wir daher wiederum

$$(3.27) \quad \int_{G_i} \nabla (\mathfrak{v} \times \nabla \times \bar{\mathfrak{v}}) dV = \int_{G_i} |\nabla \times \mathfrak{v}|^2 dV = \int_F (\mathfrak{n} \times \nabla \times \bar{\mathfrak{v}}_i) \mathfrak{v} dF$$

$$\int_{G_i} |\nabla \times \mathfrak{v}|^2 dV = - \frac{1 - \bar{\lambda}}{2} \int_F \bar{\mathfrak{v}} \mathfrak{v} dF,$$

und entsprechend

$$(3.28) \quad \int_{G_a} |\nabla \times \mathfrak{v}|^2 dV = \frac{1 + \bar{\lambda}}{2} \int_F \bar{\mathfrak{v}} \mathfrak{v} dF,$$

so folgt analog

$$(3.29) \quad (1 + \bar{\lambda}) \int_{G_i} |\nabla \times \mathfrak{v}|^2 dV + (1 - \bar{\lambda}) \int_{G_a} |\nabla \times \mathfrak{v}|^2 dV = 0,$$

d. h. unter den obigen Voraussetzungen

$$(3.30) \quad \nabla \times \mathfrak{v} \equiv 0 \quad \text{in } G_i \text{ und } G_a.$$

Nach Gl. (19) folgt $\mathfrak{E}(\mathfrak{x}') \equiv 0$.

Wir müssen noch die Fälle $\lambda = \pm 1$ erledigen. Ist $\lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ so verschwindet \mathfrak{H} in $\begin{cases} G_i \\ G_a \end{cases}$. Dann folgt aber wegen $\mathfrak{n} \times \begin{cases} \mathfrak{H}_a \\ \mathfrak{H}_i \end{cases} = 0$ und $\nabla \mathfrak{H} = \nabla \times \mathfrak{H} = 0$, daß \mathfrak{H} auch in $\begin{cases} G_a \\ G_i \end{cases}$ verschwinden muß. Denn \mathfrak{H} läßt sich als Gradient einer Potentialfunktion ansetzen, die auf F konstante Randwerte annimmt. Wie oben können wir jetzt schließen, daß $\nabla \times \mathfrak{v}$ in $\begin{cases} G_i \\ G_a \end{cases}$ verschwindet. Mithin läßt sich \mathfrak{v} in $\begin{cases} G_i \\ G_a \end{cases}$ als Gradient

einer Potentialfunktion darstellen: $v = \nabla U$. Das Feld v nimmt seine Randwerte stetig an, und wir erhalten

$$(3.34) \quad \int_F \bar{f} v \, dF = \int_F \bar{f}(x') \nabla_{x'} U \, dF_{x'} = \int_F \bar{f} \nabla_0 U \, dF = - \int_F (\nabla_0 \bar{f}) U \, dF = 0,$$

also ist auch $\nabla \times v = 0$ in $\left\{ G_a, \text{ oder } f(x') \equiv 0, \text{ was zu beweisen war.} \right.$

Lemma 5 setzt uns instande, die Existenz ausgearteter Tensoren (für $\omega = 0$) nachzuweisen.

Satz 5. *Es existieren Greensche Tensoren $\mathfrak{G}_{ik}(x, y; 0)$ mit den in Definition 4 geforderten Eigenschaften. Diese Tensoren sind eindeutig bestimmt. Es gelten die Symmetriebeziehungen*

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \mathfrak{G}_{12}(x, y; 0) &= -\mathfrak{G}_{21}(y, x; 0) \\ \mathfrak{G}_{kk}(x, y; 0) &= \mathfrak{G}_{kk}(y, x; 0) \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Beweis. Wir beschäftigen uns zunächst mit den Feldern $\mathfrak{G}_{12}a$ und $\mathfrak{G}_{22}a$ und erzeugen die kompensierenden Felder gemäß

$$(3.33) \quad \mathfrak{R}_{12}a = \frac{1}{4\pi} \int_F \left(f(\xi, \eta) \times \nabla_\xi \frac{1}{r} \right) dF_\xi \quad (r = |x - \xi|),$$

durch ein Flächenfeld f auf F , für das wir aus der Randbedingung $n \times \mathfrak{G}_{12}a = 0$ die Integralgleichung

$$(3.34) \quad -2n(x') \times \nabla_{x'} \times \frac{a}{|x' - y|} = f(x', y) - \frac{1}{2\pi} \int_F n \times \left(f \times \nabla_\xi \frac{1}{r} \right) dF_\xi$$

erhalten. Die homogene Integralgleichung besitzt nach Lemma 5 keine nicht-trivialen Lösungen, die inhomogene Integralgleichung ist stets eindeutig lösbar, das Lösungsfeld $f(x', y)$, $y \in G$, $x' \notin F$ überdies hölderstetig differenzierbar. Die Tensoren $\mathfrak{G}_{12}(x, y; 0)$ und $\mathfrak{G}_{22}(x, y; 0)$ sind auf diese Weise eindeutig bestimmt. Wir bemerken noch, daß nach Gl. (33)

$$(3.35) \quad \mathfrak{R}_{12}a = \nabla_x \times \frac{1}{4\pi} \int_F f \cdot \frac{1}{r} dF_\xi$$

ist. Es gibt also ein für $x \neq y$ stetiges Vektorfeld $w(x, y)$, so daß

$$(3.36) \quad \mathfrak{G}_{12}a = \nabla_x \times w(x, y)$$

ist.

Um die Existenz der ausgearteten Tensoren \mathfrak{G}_{21} und \mathfrak{G}_{11} nachzuweisen, bestimmen wir zunächst ein Feld v mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $v - \frac{a}{|x - y|}$ ist als Funktion von x zweimal stetig differenzierbar in G ,
- (b) für $x \neq y$ ist $\Delta v = 0$,
- (c) auf F gilt $\nabla v = 0$, $n \times v = 0$,

wobei hier die Grenzwerte bei der Annäherung an F von innen her zu nehmen sind.

Das Feld \mathbf{v} ist eindeutig bestimmt, denn die Differenz \mathbf{h} zweier Lösungsfelder wäre in G zweimal stetig differenzierbar und hätte die Eigenschaften (b) und (c). Mithin wäre

$$(3.37) \quad \int_G \nabla(\mathbf{h}) \nabla \mathbf{h} + \mathbf{h} \times \nabla \times \mathbf{h} \, dV = \int_G [(\nabla \mathbf{h})^2 + (\nabla \times \mathbf{h})^2] \, dV \\ = \int_F [(\mathbf{n} \mathbf{h}) \nabla \mathbf{h} + (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) \nabla \times \mathbf{h}] \, dF = 0,$$

d.h. $\nabla \mathbf{h} \equiv 0$ und $\nabla \times \mathbf{h} \equiv 0$ in G . Es wäre also \mathbf{h} der Gradient einer Potentialfunktion, die wegen $\mathbf{n} \times \mathbf{h} = 0$ auf F konstant sein müßte. Daraus folgt aber $\mathbf{h} \equiv 0$ in G .

Für das mithin eindeutig bestimmte Feld \mathbf{v} machen wir mit einer noch unbekannten Belegung $\varrho(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ und einem noch unbekannten Flächenfeld $\mathbf{j}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ ($\mathfrak{z} \in F$) den Ansatz: ($\mathbf{r} = |\mathfrak{z} - \mathfrak{x}|$)

$$(3.38) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|} + \frac{1}{2\pi} \int_F \varrho \, \mathbf{n} \frac{1}{r} \, dF_{\mathfrak{z}} + \frac{1}{2\pi} \int_F \left(\mathbf{j} \times \nabla_{\mathfrak{z}} \frac{1}{r} \right) dF_{\mathfrak{z}},$$

der ersichtlich die Eigenschaften (a) und (b) besitzt. Wir bestimmen zunächst die Belegung ϱ so, daß $\nabla \mathbf{v}$ auf F verschwindet. Es ist in G

$$(3.39) \quad \nabla_{\mathfrak{x}} \mathbf{v} = \mathbf{a} \nabla_{\mathfrak{x}} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|} - \frac{1}{2\pi} \int_F \varrho \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{z}}} \frac{1}{r} \, dF_{\mathfrak{z}}.$$

Lassen wir den Punkt $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x}' \in F$ rücken, so ergibt sich nach den bekannten Sprungrelationen für das Dipolpotential für die Belegung ϱ die Integralgleichung

$$(3.40) \quad \varrho(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}) - \frac{1}{2\pi} \int_F \varrho(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{z}}} \frac{1}{r} \, dF_{\mathfrak{z}} = -\mathbf{a} \nabla_{\mathfrak{x}'} \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|},$$

deren Lösbarkeit aus der Potentialtheorie wohlbekannt ist (Dirichletsches Problem). Die Lösung $\varrho(\mathfrak{x}', \mathfrak{y})$ ist als Funktion von \mathfrak{x}' (für $\mathfrak{y} \notin F$) hölderstetig differenzierbar [6], S. 242. Weiterhin bestimmen wir jetzt \mathbf{j} so, daß auch die Randbedingung $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0$ auf F erfüllt wird. Dies liefert uns für die Integralgleichung

$$(3.41) \quad \mathbf{j}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}) - \frac{1}{2\pi} \int_F \mathbf{n}(\mathfrak{x}') \times \left(\mathbf{j}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) \times \nabla_{\mathfrak{z}} \frac{1}{r} \right) dF_{\mathfrak{z}} \\ = \mathbf{n}(\mathfrak{x}') \times \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|} + \frac{1}{2\pi} \int_F \varrho \, \mathbf{n}(\mathfrak{z}) \frac{1}{r} \, dF_{\mathfrak{z}} \right),$$

deren Lösbarkeit durch Lemma 5 gesichert ist. Das Lösungsfeld $\mathbf{j}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y})$ ist hölderstetig differenzierbar. Damit ist die Existenz von \mathbf{v} nachgewiesen.

Aus dem Feld \mathbf{v} erhalten wir nun $\mathfrak{G}_{21} \mathbf{a}$ und $\mathfrak{G}_{11} \mathbf{a}$ durch

$$(3.42) \quad \mathfrak{G}_{21} \mathbf{a} = \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathbf{v},$$

$$(3.43) \quad \mathfrak{G}_{11} \mathbf{a} = i(\nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathbf{v}).$$

Die Felder $\nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathbf{v}$ und $i(\nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathbf{v})$ besitzen nämlich zunächst die nach Gl. (3.14) geforderten Singularitäten. Ferner ist wegen $\Delta_{\mathfrak{x}} \mathbf{v} = 0$:

$$(3.44) \quad \nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathbf{v} = \nabla_{\mathfrak{x}} \times (\nabla_{\mathfrak{x}} (\nabla_{\mathfrak{x}} \mathbf{v}) - \Delta_{\mathfrak{x}} \mathbf{v}) = 0,$$

also sind auch die Differentialgleichungen (15) befriedigt. Da die Felder $V_{\mathfrak{x}} \times v$ und $V_{\mathfrak{x}} \times V_{\mathfrak{x}} \times v$ ihre Randwerte gleichmäßig annehmen, gilt wegen $n \times v = 0$ und $V_{\mathfrak{x}} v = 0$ auf F schließlich $n(V_{\mathfrak{x}} \times v) = 0$ und $n \times (V_{\mathfrak{x}} \times V_{\mathfrak{x}} \times v) = n \times V_{\mathfrak{x}}(V_{\mathfrak{x}} v) = 0$ auf F . Aus Gl. (37) liest man im übrigen ab, daß auch die Felder $\mathfrak{G}_{21} a$ und $\mathfrak{G}_{11} a$ durch die Relationen Gl. (14, 15, 16) eindeutig bestimmt sind.

Wir beweisen zum Abschluß die Symmetriebeziehungen und bilden mit konstanten Vektoren a und b

$$(3.45) \quad g_{ik} = \mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) a, \quad g_{ik}^* = \mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 0) b,$$

sowie den Ausdruck

$$(3.46) \quad \int_{G - K_{\eta}^* - K_3^*} V(g_{12}^* \times g_{21} - i \cdot v \times g_{22}^* - i \cdot w^* \times g_{11}) dV_{\mathfrak{x}}.$$

Nach Gl. (33, 39, 45) ist

$$(3.47) \quad \begin{aligned} V(g_{12}^* \times g_{21}) &= i g_{21} g_{22}^* + i g_{12}^* g_{11}, \\ -i V(v \times g_{22}^*) &= -i g_{21} g_{22}^*, \\ -i V(w^* \times g_{11}) &= -i g_{12}^* g_{11}, \end{aligned}$$

der Integrand verschwindet also in $G - K_{\eta}^* - K_3^*$ und nach dem Gaußschen Satz folgt

$$(3.48) \quad 0 = \int_{F + F_{\eta}^* + F_3^*} n(g_{12}^* \times g_{21} - i v \times g_{22}^* - i w^* \times g_{11}) dF_{\mathfrak{x}}.$$

Berücksichtigt man, daß neben den Randbedingungen Gl. (16) auch $n \times v = 0$ ist auf F , so erkennt man, daß das Integral über F verschwindet. Die restlichen Integrale über F_{η}^* und F_3^* berechnen wir mit Hilfe von Lemma 3 und 4. Es ist

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\eta}^*} n(g_{12}^* \times g_{21} - i v \times g_{22}^* - i w^* \times g_{11}) dF_{\mathfrak{x}} \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_{\eta}^*} n \left[g_{12}^* \times \left(V_{\mathfrak{x}} \frac{1}{r} \times a \right) + w^* \times V_{\mathfrak{x}} \times \left(V_{\mathfrak{x}} \frac{1}{r} \times a \right) \right] dF_{\mathfrak{x}} \\ = 4\pi a \sim \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}; 0) b \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{F_3^*} n(g_{12}^* \times g_{21} - i v \times g_{22}^* - i w^* \times g_{11}) dF_{\mathfrak{x}} \\ = 4\pi b \sim \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; 0) a. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$(3.50) \quad \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}; 0) = -\mathfrak{G}_{21}^{\sim}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; 0).$$

Auf den analog vorzunehmenden Beweis der Symmetriebeziehung

$$\mathfrak{G}_{kk}^{\sim}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) = \mathfrak{G}_{kk}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}; 0) \quad k = 1, 2,$$

die wir weiterhin nicht benötigen, verzichten wir hier.

§ 4. Das Verhalten der kompensierenden Tensoren am Rand

Wir wollen das Verhalten der kompensierenden Tensoren $\mathfrak{R}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ am Rand untersuchen. Ist $\mathfrak{y} \in G$, so sind sie für alle aus \mathfrak{x} dem abgeschlossenen Bereich \overline{G} stetig. Wegen der Symmetriebeziehung (Satz 1) sind sie für $\mathfrak{x} \in G$ auch stetig für alle $\mathfrak{y} \in \overline{G}$. Als ein Ergebnis dieses Paragraphen wird sich herausstellen, daß sie nur dann singulär werden, wenn \mathfrak{x} und \mathfrak{y} gegen denselben Randpunkt auf F streben. Gemäß Gl. (3.9) werden die Felder $\mathfrak{R}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\mathfrak{a}$ durch Flächenfelder \mathfrak{f}_k auf F erzeugt, die als Lösungen der Integralgleichung (3.11):

$$(4.1) \quad (E - M) \mathfrak{f}_k = \mathfrak{g}_k \quad (k = 1, 2)$$

gegeben sind. Für die Felder

$$(4.2) \quad \mathfrak{f}_k^n = \mathfrak{f}_k - \mathfrak{g}_k - M \mathfrak{g}_k - \dots - M^{n-1} \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{f}_k^0 = \mathfrak{f}_k$$

erhalten wir die Integralgleichung

$$(4.3) \quad (E - M) \mathfrak{f}_k^n = M^n \mathfrak{g}_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dabei ist nach Gl. (3.6) und (3.7)

$$\mathfrak{g}_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}) = -2n(\mathfrak{x}') \times \left[\epsilon \omega \mu \Phi \mathfrak{a} + \frac{\epsilon'}{\omega \epsilon} \nabla_{\mathfrak{x}'} (\mathfrak{a} \nabla_{\mathfrak{x}'} \Phi) \right]$$

und

$$\mathfrak{g}_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}) = 2n(\mathfrak{x}') \times [\nabla_{\mathfrak{x}'} \Phi \times \mathfrak{a}].$$

Während die Flächenfelder \mathfrak{g}_k für $\mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{x}'$ wie $|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{-3}$ bzw. $|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{-2}$ singulär werden, sind die Felder $M^n \mathfrak{g}_k$ für genügend großes n überall stetig, wie wir weiter unten zeigen werden. Folglich ist dann auch \mathfrak{f}_k^n stetig, und die Singularitäten von \mathfrak{f}_k können durch

$$(4.4) \quad \mathfrak{f}_k = \mathfrak{g}_k + M \mathfrak{g}_k + \dots + M^{n-1} \mathfrak{g}_k + \mathfrak{f}_k^n$$

beschrieben werden, wobei \mathfrak{g}_k der am stärksten singulär werdende Anteil ist und die Singularitäten der Felder $M \mathfrak{g}_k, M^2 \mathfrak{g}_k, \dots$ von immer geringerer Ordnung sind.

Wir werden zunächst einige Hilfssätze über das Randverhalten transformierter Flächenfelder $M \mathfrak{g}$ beweisen. Dazu stellen wir das Flächenfeld $M \mathfrak{g}$ mit Hilfe einer dreireihigen Kernmatrix $\mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z})$ in der Form

$$(4.5) \quad M \mathfrak{g}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}) = \int_F \mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) \mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{z}}$$

dar. In dem speziellen Fall der durch Gl. (3.6) definierten Integraltransformation ist

$$(4.6) \quad 2\pi \mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) = [n(\mathfrak{x}') \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}')]\mathfrak{E} - \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}') [\{n(\mathfrak{x}') \times n(\mathfrak{z})\} \times n(\mathfrak{z})] \sim.$$

Hierbei ist \mathfrak{E} die dreireihige Einheitsmatrix. Im folgenden werden wir lediglich O -Abschätzungen geben. Daher wollen wir der Einfachheit halber vereinbaren, daß $|\mathfrak{A}| = O(\dots)$ bedeuten soll, daß jedes Element a_{ik} der Matrix \mathfrak{A} dieser Abschätzung genügt.

Wir wollen zunächst Abschätzungen für das transformierte Flächenfeld $M \mathfrak{g}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y})$ gewinnen. Dazu zerlegen wir bei gegebenem $\mathfrak{x}' \in F$ und $\mathfrak{y} \in G$ die Fläche F in drei Teile F_1, F_2 und F_3 . Zum ersten (F_1) gehören alle Punkte $\mathfrak{z} \in F$ mit $|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}| \leq \frac{1}{2} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|$, zum zweiten (F_2) alle Punkte $\mathfrak{z} \in F$ mit $|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| \leq \frac{1}{5} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|$, zu F_3 alle übrigen Punkte von F . Die Punktmenge F_2 kann auch leer sein.

Es gilt dann

Lemma 6. Die Kernmatrix $\mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z})$ und das Vektorfeld $g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ seien definiert für $\mathfrak{x}' \in F$, $\mathfrak{z} \in F$, $\mathfrak{y} \in \overline{G}$ und stetig für $\mathfrak{x}' \neq \mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{y}$. Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

- (1) $|g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})| = O(|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^{-\alpha}) \quad 0 \leq \alpha \leq 2,$
- (2) $\left| \int_{F_2} g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_3 \right| = O(1) \quad \mathfrak{y} \in G, \quad \mathfrak{x}' \in F,$
- (3) $|\mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z})| = O(|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}|^{-1}),$
- (4) $|\mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) - \mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')| = O\left(\frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'|}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^2}\right) \quad \text{für } |\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}| \leq \frac{1}{2} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|.$

Dann ist

$$(4.7) \quad \left| \int_F \mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_3 \right| = \begin{cases} O(|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{-\alpha+1}) \\ O\left(\log \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|}\right) \\ O(1) \end{cases} \quad \text{falls} \quad \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha < 1. \end{cases}$$

Beweis. Wir schreiben $\int = \int_F + \int_{F_1} + \int_{F_2} + \int_{F_3}$ und schätzen die Anteile einzeln ab. Auf F_1 ist $|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| \geq \frac{1}{2} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|$, also

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \left| \int_{F_1} \mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_3 \right| &= O\left(\int_{F_1} \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}| \cdot |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^\alpha} dF_3 \right) \\ &= O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^\alpha} \int_{F_1} \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}|} dF_3 \right) \\ &= O(|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{-\alpha+1}) \quad \text{bzw.} \quad O(1) \end{aligned}$$

falls $\alpha > 1$ bzw. $\alpha \leq 1$ ist.

Ist $\mathfrak{z} \in F_3$, so gilt

$$\frac{1}{2} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'| \leq |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}| + |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|$$

und

$$\frac{1}{5} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}| + |\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|,$$

d.h.

$$(4.9) \quad \frac{1}{3} \leq \frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}| + |\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|} \leq \frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|} \leq 1 + \frac{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|} \leq 6$$

der Quotient $\frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|}$ ist also auf F_3 durch die positiven Zahlen $\frac{1}{3}$ und 6 nach unten und oben beschränkt. Es ergibt sich daher

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \left| \int_{F_3} \mathfrak{M}(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_3 \right| &= O\left(\int_{F_3} \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}| \cdot |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^\alpha} dF_3 \right) \\ &= O\left(\int_{F_3} \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}|^{\alpha+1}} dF_3 \right) = O\left(\int_{F-F_1} \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}|^{\alpha+1}} dF_3 \right) \\ &= O(|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{-\alpha+1}) \quad \text{bzw.} \quad O\left(\log \frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|}\right) \quad \text{bzw.} \quad O(1) \end{aligned}$$

falls $\alpha > 1$ bzw. $\alpha = 1$ bzw. $\alpha < 1$ ist.

Bei den Abschätzungen in Gl. (8) und (9) haben wir die Voraussetzungen (2) und (4) nicht verwendet. Lediglich bei der entsprechenden Behandlung der Integrale über F_2 benötigen wir sie.

Es sei η' der Fußpunkt des Lotes von η auf F , $\eta' \in F_2$, der für genügend kleine Abstände $|\xi' - \eta|$ eindeutig bestimmt ist. Für $\xi \in F_2$ ist $|\xi' - \xi| \leq \frac{1}{2} |\xi' - \eta|$, speziell $|\xi' - \eta'| \geq \frac{1}{2} |\xi' - \eta|$. Wir schreiben nun

$$(4.11) \quad \int_{F_2} \mathfrak{M}(\xi', \xi) g(\xi, \eta) dF_\xi = \mathfrak{M}(\xi', \eta') \int_{F_2} g(\xi, \eta) dF_\xi + \int_{F_2} [\mathfrak{M}(\xi', \xi) - \mathfrak{M}(\xi', \eta')] g(\xi, \eta) dF_\xi,$$

und erhalten

$$(4.12) \quad \left| \mathfrak{M}(\xi', \eta') \int_{F_2} g(\xi, \eta) dF_\xi \right| = O(|\xi' - \eta|^{-\alpha+1}) \quad \text{bzw. } O(1),$$

sowie, unter Benutzung von Voraussetzung (4),

$$(4.13) \quad \left| \int_{F_2} [\mathfrak{M}(\xi', \xi) - \mathfrak{M}(\xi', \eta')] g(\xi, \eta) dF_\xi \right| = O\left(\int_{F_2} \frac{|\xi - \eta'|}{|\xi' - \eta'|^2 \cdot |\xi - \eta|^\alpha} dF_\xi \right) \\ = O\left(|\xi' - \eta|^{-2} \int_{F_2} \frac{|\xi - \eta'|}{|\xi - \eta|^\alpha} dF_\xi \right) = O(|\xi' - \eta|^{-\alpha+1}) \quad \text{bzw. } O(1).$$

Wir dürfen Voraussetzung (4) hier anwenden, da für zwei beliebige Punkte $\xi_1 \in F_2$ und $\xi_2 \in F_2$: $|\xi_1 - \xi_2| \leq \frac{1}{2} |\xi_1 - \xi'|$ gilt. Wir bemerken noch, daß Voraussetzung (2) automatisch erfüllt ist, falls $\alpha < 2$ ist. Setzen wir an Stelle von (2)

$$(2^*) \quad \left| \int_F g(\xi, \eta) dF_\xi \right| = O(1) \quad (\text{für alle } \eta \in G)$$

voraus, so gelten die Aussagen unseres Lemmas auch für $0 \leq \alpha < 3$, jedoch für $\alpha = 2$ nur mit dem Ergebnis $O(|\xi' - \eta|^{-1} \log |\xi' - \eta|^{-1})$. Im übrigen vgl. man H. WEYL [18].

Wir zeigen weiterhin

Lemma 7. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt und es gelte außerdem mit $\mathfrak{M}^*(\xi', \xi'', \xi) = \mathfrak{M}(\xi', \xi) - \mathfrak{M}(\xi'', \xi)$*

$$(5) \quad |\mathfrak{M}^*(\xi', \xi'', \xi)| = O\left(\frac{|\xi' - \xi''|}{|\xi' - \xi| \cdot |\xi'' - \xi|} \right)$$

und

$$(6) \quad |\mathfrak{M}^*(\xi', \xi'', \xi) - \mathfrak{M}^*(\xi', \xi'', \eta')| = O\left(\frac{|\xi' - \xi''| \cdot |\xi - \eta'|}{|\xi' - \eta'|^3} \right)$$

für

$$(4.14) \quad |\xi' - \xi''| \leq \frac{1}{3} |\xi' - \eta'|, \quad |\xi - \eta'| \leq \frac{1}{2} |\xi' - \eta'|.$$

Dann erfüllt das Feld Mg eine Hölder-Bedingung der Form

$$(4.15) \quad |Mg(\xi', \eta) - Mg(\xi'', \eta)| = O\left(\frac{|\xi' - \xi''|}{r^\alpha} \log \frac{r}{|\xi' - \xi''|} \right)$$

für

$$|\xi' - \xi''| \leq \frac{1}{4} r, \quad r = |\xi' - \eta|.$$

Beweis. Die Punkte $x', x'' \in F$ und $\eta \in G$ seien gegeben und es gelte $|x' - x''| \leq \frac{1}{4}r$. Wir zerlegen die Fläche F wie in Lemma 6 in drei Teile F_1 , F_2 und F_3 , wobei die Einteilung bezüglich der Punkte x' und η getroffen werden soll. Dann gilt unter Berücksichtigung von Gl. (4.9) und Voraussetzung (5)

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{F_3} \mathfrak{M}^*(x', x'', \zeta) g(\zeta, \eta) dF_\zeta \right| &= O \left(|x' - x''| \int_{F_3} \frac{1}{|x' - \zeta| \cdot |x'' - \zeta| \cdot |\zeta - \eta|^\alpha} dF_\zeta \right) \\
 (4.16) \qquad \qquad \qquad &= O \left(|x' - x''| \int_{F-F_1} \frac{1}{|x' - \zeta|^{\alpha+2}} \right) \\
 &= O \left(\frac{|x' - x''|}{r^\alpha} \right).
 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 &\int_{F_2} \mathfrak{M}^*(x', x'', \zeta) g(\zeta, \eta) dF_\zeta \\
 (4.17) \quad &= \mathfrak{M}^*(x', x'', \eta') \int_{F_2} g(\zeta, \eta) dF_\zeta - \int_{F_2} [\mathfrak{M}^*(x', x'', \eta') - \mathfrak{M}^*(x', x'', \zeta)] g(\zeta, \eta) dF_\zeta \\
 &= O \left(\frac{|x' - x''|}{r^2} \left| \int_{F_2} g(\zeta, \eta) dF_\zeta \right| \right) + O \left(\frac{|x' - x''|}{r^3} \int_{F_2} \frac{|\zeta - \eta'|}{|\zeta - \eta|^\alpha} dF_\zeta \right) = O \left(\frac{|x' - x''|}{r^\alpha} \right).
 \end{aligned}$$

Voraussetzung (6) läßt sich hierbei anwenden, da für $\zeta \in F_2$, $\eta' \in F_2$

$$|x' - x''| \leq \frac{1}{3} |x' - \eta'| r \quad \text{und} \quad |\zeta - \eta'| \leq \frac{1}{2} |x' - \eta'| r$$

ist.

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{F_1} \mathfrak{M}^*(x', x'', \zeta) g(\zeta, \eta) dF_\zeta \right| &= O \left(\frac{|x' - x''|}{r^\alpha} \int_{F_1} \frac{1}{|x' - \zeta| \cdot |x'' - \zeta|} dF_\zeta \right) \\
 (4.18) \qquad \qquad \qquad &= O \left(\frac{|x' - x''|}{r^\alpha} \log \frac{r}{|x' - x''|} \right).
 \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Als Korollar zu Lemma 7 bemerken wir, daß im Falle $0 \leq \alpha < 1$ das Feld Mg hölderstetig ist mit einem von η unabhängigen Koeffizienten. Es ist nämlich in diesem Fall

$$\left| \int_F \mathfrak{M}^*(x', x'', \zeta) g(\zeta, \eta) dF_\zeta \right| = O \left(|x' - x''|^{\frac{1-\alpha}{2}} \right)$$

wobei diese Abschätzung gleichmäßig für alle $\eta \in \bar{G}$ gilt.

Wir betrachten nunmehr die in Gl. (4.6) gegebene Kernmatrix und zeigen, daß sie die Voraussetzungen von Lemma 6 und 7 erfüllt.

Lemma 8. Die Kernmatrizen

$$\mathfrak{M}_1(x', \zeta) = [n(x') V_\zeta \Phi(\zeta, x')] \mathfrak{E}$$

und

$$\mathfrak{M}_2(x', \zeta) = V_\zeta \Phi(\zeta, x') [(n(x') \times n(\zeta)) \times n(\zeta)]^\sim$$

erfüllen beide die Voraussetzungen von Lemma 6 und 7 und zwar bei rein imaginärem $k=i\tau$ gleichmäßig für alle $\tau \geq 0$.

Beweis. Es ist

$$(4.19) \quad |n(\mathfrak{x}') V_3 \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}')| = O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}|}\right)$$

und

$$(4.20) \quad |V_3 \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}')| \cdot |n(\mathfrak{x}') \times n(\mathfrak{z})| = O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}|}\right).$$

Beide Abschätzungen gelten bei rein imaginärem $\mathcal{K} = i\tau$ gleichmäßig für alle $\tau \geq 0$. Daraus folgt Voraussetzung (3). Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist mit geeignetem ϑ ($0 < \vartheta < 1$) und mit $\mathfrak{z}^* = \mathfrak{z} + \vartheta(\mathfrak{y}' - \mathfrak{z})$

$$(4.21) \quad n(\mathfrak{x}') \{V_3 \Phi - V_{\mathfrak{y}'} \Phi\} = (\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}) V_{\mathfrak{z}^*} \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}'}} \Phi(\mathfrak{z}^*, \mathfrak{x}').$$

Hierbei bezeichnet $\frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}'}}$ die Ableitung in Richtung der Normalen im Punkte \mathfrak{x}' .

Setzen wir $\mathfrak{r} = \mathfrak{x}' - \mathfrak{z}^*$, $r = |\mathfrak{r}|$, $\mathfrak{r}^0 = \frac{1}{r} \mathfrak{r}$ und $\varphi(r) = \frac{e^{i\mathcal{K}r}}{r}$, so ist

$$(4.22) \quad \begin{aligned} n(\mathfrak{x}') \{V_3 \Phi - V_{\mathfrak{y}'} \Phi\} \\ = -r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) [(\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}) \mathfrak{r}^0] [n(\mathfrak{x}') \mathfrak{r}^0] + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} [(\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}) n(\mathfrak{x}')]. \end{aligned}$$

Für $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}| \leq \frac{1}{2} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|$ ist $r \geq \frac{1}{2} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|$ und

$$(4.23) \quad \left| \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right| = O\left(\frac{1}{r^3}\right) = O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^3}\right),$$

sowie

$$(4.24) \quad \left| r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \right| = O\left(\frac{1}{r^3}\right) = O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^3}\right),$$

wobei diese Abschätzungen bei rein imaginärem $\mathcal{K} = i\tau$ gleichmäßig für alle $\tau \geq 0$ gelten. Wegen $|n(\mathfrak{x}') \mathfrak{r}^0| = O(r)$ und $|n(\mathfrak{x}') (\mathfrak{y}' - \mathfrak{z})| = O(|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'| \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}|)$ erhalten wir daher insgesamt

$$(4.25) \quad |n(\mathfrak{x}') \{V_3 \Phi - V_{\mathfrak{y}'} \Phi\}| = O\left(\frac{|\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}|}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^2}\right),$$

d. h. der Kern $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{z})$ erfüllt Voraussetzung (4).

Um diese Voraussetzung auch für den Kern \mathfrak{M}_2 nachzuweisen, schreiben wir

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) - \mathfrak{M}_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') &= (V_3 \Phi - V_{\mathfrak{y}'} \Phi) [\{n(\mathfrak{x}') \times n(\mathfrak{y}')\} \times n(\mathfrak{y}')]^\sim + \\ &\quad + V_3 \Phi [(n(\mathfrak{x}') n(\mathfrak{z})) n(\mathfrak{z}) - (n(\mathfrak{x}') n(\mathfrak{y}')) n(\mathfrak{y}')]^\sim, \end{aligned}$$

und schätzen die beiden Summanden einzeln ab. Es ist für $|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'| \leq \frac{1}{2} |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|$

$$(4.27) \quad |V_3 \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}') - V_{\mathfrak{y}'} \Phi(\mathfrak{y}', \mathfrak{x}')| = O\left(\frac{|\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}|}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^3}\right)$$

und

$$(4.28) \quad |n(\mathfrak{z}) (n(\mathfrak{x}') n(\mathfrak{z})) - n(\mathfrak{y}') (n(\mathfrak{x}') n(\mathfrak{y}'))| = O(|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'|),$$

so daß wir insgesamt

$$(4.29) \quad |\mathfrak{M}_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) - \mathfrak{M}_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')| = O\left(\frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'|}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^2}\right)$$

erhalten. Diese Abschätzung gilt wieder gleichmäßig für $\tau \geq 0$.

Auf entsprechende Weise zeigt man, daß die beiden Kerne \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 auch die Voraussetzung (5) erfüllen, wobei auch hier die Gleichmäßigkeitsaussage bei rein imaginärem \mathcal{K} gilt. Wir wenden uns nunmehr dem Beweis von Voraussetzung (6) zu. Führen wir zur Abkürzung die Funktion

$$f(\xi', \xi'', \xi) = n(\xi') V_\xi \Phi(\xi, \xi') - n(\xi'') V_\xi \Phi(\xi, \xi'')$$

ein, so haben wir die Differenz $\Delta = f(\xi', \xi'', \xi) - f(\xi', \xi'', \eta')$ abzuschätzen, und zwar unter den Voraussetzungen

$$|\xi' - \xi''| \leq \frac{1}{3} |\xi' - \eta'|, \quad |\xi - \eta'| \leq \frac{1}{2} |\xi' - \eta'|.$$

Mit geeignetem ϑ ($0 < \vartheta < 1$) und $\xi^* = \xi + \vartheta(\eta' - \xi)$ erhalten wir nach dem Mittelwertsatz

$$(4.30) \quad \Delta = (\xi - \eta') V_{\xi^*} f(\xi', \xi'', \xi^*).$$

Setzen wir noch $r_1 = \xi^* - \xi'$, $r_2 = \xi^* - \xi''$ sowie $|r_j| = r_j$, $\frac{1}{r_j} r_j = r_j^0$ ($j=1, 2$) und $\varphi(r) = \frac{1}{r} e^{i\mathcal{K}r}$, so ist $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ mit

$$(4.31) \quad \Delta_1 = (\xi - \eta') n(\xi') \frac{1}{r_1} \frac{d\varphi(r_1)}{dr_1} - (\xi - \eta') n(\xi') \frac{1}{r_2} \frac{d\varphi}{dr_2}$$

und

$$(4.32) \quad \Delta_2 = (\xi - \eta') \left\{ r_1^0 \left(n(\xi') r_1 \right) \frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\varphi}{dr_1} \right) - r_2^0 \left(n(\xi'') r_2 \right) \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{r_2} \frac{d\varphi}{dr_2} \right) \right\}.$$

Berücksichtigen wir, daß

$$(4.33) \quad \left| \frac{1}{r_1} \frac{d\varphi(r_1)}{dr_1} - \frac{1}{r_2} \frac{d\varphi(r_2)}{dr_2} \right| = O\left(\frac{|\xi' - \xi''|}{|\xi' - \eta'|^4} \right)$$

ist, und zwar gleichmäßig bei rein imaginärem \mathcal{K} , und daß ferner

$$(4.34) \quad |n(\xi'') (\xi - \eta')| = O(|\xi - \eta'| \cdot |\xi' - \eta'|)$$

ist, so erhalten wir für Δ_1 die Abschätzung

$$(4.35) \quad |\Delta_1| = O\left(\frac{|\xi' - \xi''| \cdot |\xi - \eta'|}{|\xi' - \eta'|^3} \right),$$

und zwar gleichmäßig für $\tau \geq 0$.

Entsprechend ist wegen

$$(4.36) \quad \left| \frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\varphi}{dr_1} \right) - \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{r_2} \frac{d\varphi}{dr_2} \right) \right| = O\left(\frac{|\xi' - \xi''|}{|\xi' - \eta'|^5} \right)$$

und

$$(4.37) \quad |(\xi - \eta') \{ r_1 (n(\xi') r_1^0) - r_2 (n(\xi'') r_2^0) \}| = O(|\xi' - \xi''| \cdot |\xi - \eta'| \cdot |\xi' - \eta'|)$$

auch

$$(4.38) \quad |\Delta_2| = O\left(\frac{|\xi' - \xi''| \cdot |\xi - \eta'|}{|\xi' - \eta'|^3} \right).$$

Damit ist gezeigt, daß \mathfrak{M}_1 die Voraussetzung (5) erfüllt. Wir haben diese Voraussetzung schließlich noch für den Kern \mathfrak{M}_2 nachzuweisen.

Setzen wir zur Abkürzung für die Vektoren

$$V_\xi \Phi(\xi, \xi') = a_1, \quad V_\xi \Phi(\xi, \xi'') = a_2, \quad V_{\eta'} \Phi(\eta', \xi') = a_3, \quad V_{\eta'} \Phi(\eta', \xi'') = a_4,$$

und entsprechend für

$$[n(x') \times n(\xi)] \times n(\xi) = b_1, \dots, [n(x'') \times n(y')] \times n(y') = b_4,$$

so ist

$$(4.39) \quad \mathfrak{M}_2^*(x', x'', \xi) - \mathfrak{M}_2^*(x', x'', y') = a_1 b_1 \sim - a_2 b_2 \sim - a_3 b_3 \sim + a_4 b_4 \sim.$$

Wir zerlegen diesen Ausdruck in die Summanden

$$a_1(b_1 - b_2 - b_3 + b_4) \sim + (a_1 - a_2 - a_3 + a_4) b_3 \sim + \\ + (a_4 - a_2)(b_4 - b_3) \sim + (a_1 - a_2)(b_2 - b_4) \sim.$$

Nach Gl. (4.27) ergibt sich für die letzten beiden Summanden sogleich die gewünschte Abschätzung. Ferner ist

$$|b_1 - b_2 - b_3 + b_4| = O(|x' - x''| \cdot |\xi - y'|)$$

und

$$|a_1 - a_2 - a_3 + a_4| = O\left(\frac{|x' - x''| \cdot |\xi - y'|}{|x' - y'|^3}\right).$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$(4.40) \quad |\mathfrak{M}_2^*(x', x'', \xi) - \mathfrak{M}_2^*(x', x'', y')| = O\left(\frac{|x' - x''| \cdot |\xi - y'|}{|x' - y'|^3}\right).$$

Da die Abschätzungen bei rein imaginärem $\mathcal{K} = i\tau$ auch gleichmäßig gelten für alle $\tau \geq 0$, ist damit Lemma 8 bewiesen.

Das Flächenfeld $g_2(x', y) = 2n(x') \times [V_{x'} \Phi(x', y) \times \alpha]$, das wir zur Erzeugung des Tensors $\mathfrak{N}_{12} \alpha$ verwendet hatten, erfüllt die Voraussetzungen in Lemma 6 und 7 mit $\alpha = 2$, denn es ist für beliebige $x' \in F$, $y \in G$

$$(4.41) \quad |g_2(x', y)| = O\left(\frac{1}{|x' - y|^2}\right)$$

und

$$(4.42) \quad \left| \int_{F_3} V_3 \Phi(\xi, y) dF_3 \right| = O(1),$$

wobei beide Abschätzungen bei rein imaginärem \mathcal{K} gleichmäßig gelten. Infolgedessen ist

$$(4.43) \quad |M g_2| = O\left(\frac{1}{|x' - y|}\right)$$

$$(4.44) \quad |M^2 g_2| = O(\log |x' - y|^{-1})$$

$$(4.45) \quad |M^3 g_2| = O(1).$$

Alle Felder erfüllen nach Lemma 7 eine Hölder-Bedingung. Insbesondere ist das Feld $M^3 g_2$ nach dem Korollar zu Lemma 7 hölderstetig, und zwar gleichmäßig für alle $y \in \bar{G}$. Für die Lösung f_2 der Integralgleichung (4.1) erhalten wir daher nach Gl. (4.4)

$$(4.46) \quad f_2 = g_2 + M g_2 + M^2 g_2 + f_2^3.$$

Dabei ist $|f_2^3| = O(1)$ und erfüllt in x' eine Hölder-Bedingung der Form $O(|x' - x''|^{\frac{1}{2}})$, gleichmäßig für alle y . Bei rein imaginärem $\mathcal{K} = i\tau$ konvergiert auch die Neumannsche Reihe der Integralgleichung für genügend große $\tau \geq \tau_0$ (τ_0 hängt nur von dem Gebiet G ab). Die Abschätzungen für f_2^3 gelten daher in diesem Fall auch gleichmäßig für alle $\tau \geq \tau_0$.

Nun wird der Tensor \mathfrak{R}_{12} a durch das Flächenfeld $\mathfrak{f}_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y})$ gemäß Gl. (3.9) durch

$$(4.47) \quad \mathfrak{R}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \mathfrak{a} = - \frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{f}_2(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) \times \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) dF_{\mathfrak{z}}$$

erzeugt. Wir können Felder dieser Form mittels einer Matrix $\mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$ als

$$\int_F \mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) \mathfrak{f}_2(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{z}}$$

darstellen. In unserem Fall ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$ gegeben durch

$$(4.48) \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) \mathfrak{b} = \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) \times \mathfrak{b},$$

mit beliebigem konstantem Vektor \mathfrak{b} . Wir wollen zeigen, daß die Tensoren \mathfrak{R}_{ik} nur dann singular werden, wenn \mathfrak{x} und \mathfrak{y} gegen denselben Randpunkt auf F streben. Dazu benutzen wir den Begriff des „Lichtweges“ zwischen den Punkten \mathfrak{x} und \mathfrak{y} , das ist anschaulich der Weg, den ein Lichtstrahl bei einmaliger Reflektion an F zwischen \mathfrak{x} und \mathfrak{y} zurückzulegen hat. Wir definieren diesen Lichtweg, den wir mit $R(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bezeichnen, durch

$$(4.49) \quad R(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \inf_{\mathfrak{z} \in F} (|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}| + |\mathfrak{y} - \mathfrak{z}|).$$

Wir werden die Tensoren durch geeignete Potenzen des Lichtweges abschätzen. Abschätzungen dieser Art sind früher von H. WEYL [18] gegeben worden.

Bei dem Beweis des folgenden Lemmas zerlegen wir zu gegebenen Punkten $\mathfrak{x} \in G$, $\mathfrak{y} \in G$ die Oberfläche F in drei Teile F_1 , F_2 und F_3 , und zwar

$$F_1 = \{\mathfrak{z}, |\mathfrak{x} - \mathfrak{z}| \leq \tfrac{1}{9}R\}$$

$$F_2 = \{\mathfrak{z}, |\mathfrak{y} - \mathfrak{z}| \leq \tfrac{1}{9}R\}$$

$$F_3 = \{\mathfrak{z}, \mathfrak{z} \notin F_1, \mathfrak{z} \notin F_2\}.$$

Die Punktmenge F_1 und F_2 können dabei leer sein. Es gilt nun

Lemma 9. *Das Feld $g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ und die Matrix $\mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$ seien definiert für $\mathfrak{z} \in F$; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in G$ und stetig für $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{y}$ bzw. $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{x}$. Es sei ferner*

$$(1) \quad |g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})| = O(|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 2,$$

$$(2) \quad \left| \int_{F_2} g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{z}} \right| = O(1) \quad (\text{falls } \alpha = 2 \text{ ist}),$$

$$(3) \quad |g(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) - g(\mathfrak{x}', \mathfrak{y})| = O\left(\frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{\alpha+1}}\right)$$

$$\text{für } |\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'| \leq \tfrac{1}{4}|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|,$$

$$(4) \quad |\mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})| = O(|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}|^{-2})$$

$$(5) \quad \left| \int_{F_1} \mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) dF_{\mathfrak{z}} \right| = O(1)$$

und

$$(6) \quad |\mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) - \mathfrak{N}(\mathfrak{y}', \mathfrak{x})| = O\left(\frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'|}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}'|^3}\right)$$

$$\text{für } |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'| \leq \tfrac{1}{4}|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}'|.$$

Dann gilt das für Feld

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \int_F \mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) \mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{z}}$$

die Abschätzung

$$|\mathfrak{h}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| = O\left(\frac{1}{R^\alpha}\right)$$

wobei $R(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der nach Gl. (4.49) definierte Lichtweg zwischen \mathfrak{x} und \mathfrak{y} ist.

Beweis. Wir setzen

$$(4.50) \quad \mathfrak{h}_j(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \int_{F_j} \mathfrak{N} \mathfrak{g} dF \quad (j = 1, 2, 3)$$

und schätzen zunächst \mathfrak{h}_3 ab. Auf F_3 ist analog zu Gl. (4.9)

$$(4.51) \quad \frac{1}{10} \leq \frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}|}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|} \leq 10,$$

daher

$$(4.52) \quad \begin{aligned} |\mathfrak{h}_3| &= O\left(\int_{F_3} \frac{1}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^\alpha} \frac{1}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}|^2} dF_{\mathfrak{z}}\right) \\ &= O\left(\int_{F_3} \frac{dF_{\mathfrak{z}}}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}|^{\alpha+2}}\right) = O\left(\frac{1}{R^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Es sei \mathfrak{y}' der Fußpunkt des Lotes von \mathfrak{y} auf F , $\mathfrak{y}' \in F_2$ falls F_2 nicht leer ist. Für $\mathfrak{z} \in F_2$ ist $|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}| \geq \frac{8}{9}R$ und für zwei beliebige Punkte $\mathfrak{z}_1 \in F_2$, $\mathfrak{z}_2 \in F_2$ ist $|\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| \leq \frac{1}{4}|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_2|$, insbesondere also $|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'| \leq \frac{1}{4}|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}'|$. Unter Verwendung der Voraussetzungen (2) und (5) erhalten wir daher für

$$(4.53) \quad \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{N}(\mathfrak{y}', \mathfrak{x}) \int_{F_2} \mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{z}} + \int_{F_2} [\mathfrak{N}(\mathfrak{y}', \mathfrak{x}) - \mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})] \mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{z}},$$

d.h.

$$(4.54) \quad \begin{aligned} |\mathfrak{h}_2| &= O\left(\frac{1}{R^2} \left| \int_{F_2} \mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{z}} \right| \right) - O\left(\int_{F_2} \frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}'|}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^\alpha \cdot |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}'|^3} dF_{\mathfrak{z}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{R^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir für \mathfrak{h}_1 unter Verwendung der Voraussetzung (3) und (5)

$$(4.55) \quad \mathfrak{h}_1 = \left(\int_{F_1} \mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) dF_{\mathfrak{z}} \right) \mathfrak{g}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}) + \int_{F_1} \mathfrak{N}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) [\mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y})] dF_{\mathfrak{z}}$$

d.h.

$$(4.56) \quad \begin{aligned} |\mathfrak{h}_1| &= O\left(\frac{1}{R^\alpha}\right) + O\left(\int_{F_1} \frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}|^2 \cdot |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{\alpha+1}} dF_{\mathfrak{z}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{R^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 9 bewiesen.

Als Korollar zu Lemma 9 bemerken wir: Erfüllt \mathfrak{g} eine Hölder-Bedingung der Form

$$(4.57) \quad |\mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})| - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y})| = O\left(\frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|^{\alpha+1}} \log \frac{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}|}{|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}'|}\right)$$

so gilt

$$(4.58) \quad |\eta(x, y)| = O\left(\frac{1}{R^2} \log \frac{1}{R}\right).$$

Ist $q(x', y)$ in bezug auf x' gleichmäßig hölderstetig für alle $y \in \bar{G}$, so ist $\eta(x, y)$ stetig als Funktion von x und y in \bar{G} .

Die in Gl. (4.48) definierte Matrix $\mathfrak{R}(\beta, x)$ erfüllt nach Gl. (4.27) und (4.42) die Voraussetzungen von Lemma 9. Auch das Flächenfeld $g_2(x', y)$ erfüllt nach Gl. (4.27), (4.41) und (4.42) die Voraussetzungen von Lemma 9 mit $\alpha = 2$. Schließlich erfüllen die transformierten Flächenfelder $M g_2$, $M^2 g_2$, $M^3 g_2$ die Voraussetzungen von Lemma 9 mit jeweils niedrigeren Singularitäten. Die Felder erfüllen eine Hölder-Bedingung nach Lemma 7. Daher ergibt sich insgesamt:

Satz 6. *Es sei $R(x, y)$ der Lichtweg zwischen x und y , dann ist*

$$(4.59) \quad |\mathfrak{R}_{12}(x, y)| = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

oder genauer

$$(4.60) \quad \mathfrak{R}_{12}(x, y) \alpha = -\frac{1}{4\pi} \int_F g_2(\beta, y) \times V_\beta \Phi(\beta, x) dF_\beta + O\left(\frac{1}{R} \log \frac{1}{R}\right).$$

Entsprechend gilt (wegen der Symmetriebeziehung)

$$(4.61) \quad |\mathfrak{R}_{21}(x, y)| = O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Die Abschätzungen gelten bei rein imaginären $\ell = i\tau$ gleichmäßig für alle $\tau \geq \tau_0$, wobei τ_0 nur von G abhängt.

Im Fall der Tensoren \mathfrak{R}_{11} und \mathfrak{R}_{22} lassen sich Lemma 6, 7 und 9 nicht ohne weiteres anwenden, da z. B. der Anteil

$$g_1^*(x', y) = -\frac{2i}{\omega \varepsilon} n(x') \times V_{x'} (\alpha V_{x'} \Phi(x', y))$$

des Flächenfeldes $g_1(x', y)$ von der Ordnung $|x' - y|^{-3}$ singulär wird. Wir zeigen hierzu

Satz 7. *Es sei $R = R(x, y)$ der Lichtweg zwischen x und y . Dann ist*

$$(4.62) \quad \mathfrak{R}_{11}(x, y) \alpha = -\frac{1}{4\pi} \int_F g_1^*(x, y) \times V_\beta \Phi(\beta, x) dF_\beta + O\left(\frac{1}{R^2} \log \frac{1}{R}\right),$$

$$(4.63) \quad \mathfrak{R}_{22}(x, y) \alpha = -\frac{i}{2\pi \omega \mu} \int_F \frac{\partial (\alpha V_\beta \Phi(\beta, y))}{\partial n_\beta} V_\beta \Phi(\beta, x) dF_\beta + O\left(\frac{1}{R^2} \log \frac{1}{R}\right)$$

und

$$(4.64) \quad |\mathfrak{R}_{jj}(x, y)| = O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad (j = 1, 2).$$

Beweis. Der Tensor \mathfrak{R}_{11} wird durch das Flächenfeld g_1 in derselben Weise erzeugt wie der Tensor \mathfrak{R}_{12} durch das Flächenfeld g_2 . Die wiederholte Anwendung von Lemma 6, 7 und 9 scheitert aber zunächst an der Singularität des Anteils $g_1^*(x', y)$. Wir betrachten daher

$$(4.65) \quad M g_1^* = \int_F \mathfrak{M}(x', \beta) g_1^*(\beta, y) dF_\beta,$$

und wollen zeigen, daß dieses Feld die Voraussetzungen (1) und (2*) von Lemma 6 mit $\alpha=2$ und eine Hölder-Bedingung gemäß Lemma 7 erfüllt. Wie in Lemma 6 und 7 zerlegen wir F in F_1 , F_2 und F_3 . Für die entsprechenden Integrale über F_1 und F_3 erhalten wir ($r=|\mathbf{r}'-\mathbf{y}|$)

$$\tilde{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ bzw. } O\left(\frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}{r^2} \log \frac{r}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\right),$$

da die Abschätzungen dort auch für beliebige $\alpha > 0$ gültig bleiben. Es verbleibt noch das Integral über F_2 , d. h. bis auf den konstanten Faktor $-\frac{2\epsilon}{\omega \epsilon}$ der Ausdruck

$$(4.66) \quad \mathfrak{f}(\mathbf{r}', \mathbf{y}) = \int_{F_2} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \{[\mathbf{n}(\mathfrak{z}) \times \nabla_{\mathfrak{z}} (\alpha \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{y}))] \times \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}')\} dF_3.$$

Es ist

$$(4.67) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{r}', \mathbf{y}) &= \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \int_{F_2} \mathbf{n}(\mathfrak{z}) \times \nabla_{\mathfrak{z}} (\Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}') \alpha \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{y})) dF_3 - \\ &\quad - \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \int_{F_2} (\alpha \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi) (\mathbf{n}(\mathfrak{z}) \times \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}')) dF_3. \end{aligned}$$

Den ersten Anteil formen wir nach dem Satz von STOKES um und erhalten

$$(4.68) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{r}', \mathbf{y}) &= \int_{\mathfrak{C}(F_2)} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times (\nabla_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}') \times \mathbf{t}_0) (\alpha \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{y})) d\mathfrak{s}_3 - \\ &\quad - \int_{F_2} (\alpha \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi) \left(\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \frac{\partial}{\partial n_3} \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}') \right) dF_3 + \\ &\quad + k^2 \int_{F_2} (\alpha \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi) (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathfrak{z})) \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}') dF_3. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathfrak{C}(F_2)$ die Randkurve des Flächenstückes F_2 , \mathbf{t}_0 der Tangentialvektor an $\mathfrak{C}(F_2)$, ($\mathbf{t}_0^2=1$). Für $\mathfrak{z} \in F_2$ gilt

$$(4.69) \quad |\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times (\nabla_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}') \times \mathbf{t}_0)| = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Folglich ist

$$(4.70) \quad \begin{aligned} |\mathfrak{f}(\mathbf{r}', \mathbf{y})| &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) + O\left(\int_{F_2} \frac{1}{|\mathfrak{z}-\mathbf{y}|^2} \left| \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \left(\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} \nabla_{\mathbf{y}} \Phi - \frac{\partial}{\partial n_3} \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi \right) \right| dF_3\right) \\ &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) + O\left(\frac{1}{r^3} \int_{F_2} \frac{|\mathfrak{z}-\mathbf{y}'|}{|\mathfrak{z}-\mathbf{y}|^2} dF_3\right) \\ &= O\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Ganz entsprechend ergibt sich auch die Gültigkeit der Hölder-Bedingung auf F_2 und unter Benutzung des Stokesschen Satzes Voraussetzung (2*). Wir können daher Lemma 6, 7 und 9 auf $M_{\mathfrak{g}1}^*$ anwenden und erhalten nach den gleichen Überlegungen wie in Satz 6 das Ergebnis

$$\mathfrak{R}_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{y}) \alpha = -\frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{g}1^*(\mathfrak{z}, \mathbf{y}) \times \nabla_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathbf{r}) dF_3 + O\left(\frac{1}{R^2} \log \frac{1}{R}\right).$$

Schließlich ist der erste Anteil von der Ordnung: $O(R^{-3})$. Die Anwendung von Lemma 9 bietet nämlich Schwierigkeiten nur bei dem Integral über F_2 , die sich

aber durch eine entsprechende Anwendung des Stokesschen Satzes umgehen lassen.

Wir haben noch den Tensor \mathfrak{H}_{22} zu betrachten. Er wird aus dem Flächenfeld $\mathfrak{f}_2(\mathfrak{x}', \eta)$ gemäß

$$(4.71) \quad \mathfrak{H}_{22}(\mathfrak{x}, \eta) \alpha = \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ i\omega \varepsilon \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) \mathfrak{f}_2(\mathfrak{z}, \eta) - \frac{i}{\omega\mu} (V_0 \mathfrak{f}_2) V_3 \Phi \right\} dF_3$$

erzeugt. Der erste Summand des Integranden bereitet keine Schwierigkeiten, er ist von der Ordnung $O(R^{-1})$. Bei dem zweiten tritt die Flächendivergenz $V_0 \mathfrak{f}_2$ auf. Zerlegen wir \mathfrak{f}_2 wieder gemäß Gl. (4.2) in

$$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + M \mathfrak{g}_2 + M^2 \mathfrak{g}_2 + M^3 \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{f}_2^4,$$

so ist

$$V_0 \mathfrak{f}_2 = V_0 \mathfrak{g}_2 + V_0 M \mathfrak{g}_2 + \cdots + V_0 \mathfrak{f}_2^4.$$

Falls $V_0 \mathfrak{g}$ existiert und stetig ist, gilt

$$(4.72) \quad \begin{aligned} V_0(M \mathfrak{g}) &= \int_F (\mathfrak{n}(\mathfrak{x}') V_3 \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}')) V_0 \mathfrak{g}(\mathfrak{z}, \eta) dF_3 - k^2 \int_F (\mathfrak{n}(\mathfrak{x}') \mathfrak{g}) \Phi dF_3 \\ &= M^* V_0 \mathfrak{g} + N^* \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Man erhält diese Formel, wenn man aus F ein Flächenstück um \mathfrak{x}' ausschneidet, von dem Restintegral die Flächendivergenz bildet und nach dem Stokesschen Satz umformt. Ferner ist

$$(4.73) \quad V_0 \mathfrak{g}_2 = -2 \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{x}'}} (\alpha V_{\mathfrak{x}'} \Phi) + 2k^2 \Phi (\alpha \mathfrak{n}(\mathfrak{x}')),$$

daher

$$(4.74) \quad V_0 \mathfrak{f}_2 = V_0 \mathfrak{g}_2 + (M^* + M^{*2} + M^{*3}) V_0 \mathfrak{g}_2 + V_0 \mathfrak{f}_2^4 + N^{**} \mathfrak{g}_2,$$

wobei N^{**} sich aus Produkten von N^* , M^* und M zusammensetzt. $N^{**} \mathfrak{g}_2$ trägt also zu \mathfrak{H}_{22} nur Glieder von der Ordnung $O(R^{-1})$ bei. \mathfrak{f}_2^3 genügt in \mathfrak{x}' gleichmäßig für alle $\eta \in \bar{G}$ einer Hölder-Bedingung, dasselbe gilt daher auch für die Ableitungen von $\mathfrak{f}_2^4 = M \mathfrak{f}_2^3$. Auf $M^* V_0 \mathfrak{g}_2$, $M^{*2} V_0 \mathfrak{g}_2$, $M^{*3} V_0 \mathfrak{g}_2$ lassen sich Lemma 6 und 7 anwenden. Der Kern $M^*(\mathfrak{x}', \mathfrak{z}) = \mathfrak{n}(\mathfrak{x}') V_3 \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}')$ erfüllt nämlich nach Lemma 8 die Voraussetzungen von Lemma 6 und 7. Die weiteren Überlegungen verlaufen analog zu denen im Fall des Tensors \mathfrak{H}_{11} , so daß wir auf die Einzelheiten verzichten.

Wir wenden unsere Ergebnisse an und beweisen:

Satz 8. In G seien die Vektorfelder \mathfrak{i} , \mathfrak{i}' und ihre Divergenzen definiert und stetig. Dann erfüllen die Felder

$$(4.75) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}(\mathfrak{x}) &= \frac{1}{3i\omega\varepsilon} \mathfrak{i}(\mathfrak{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_G [\mathfrak{G}_{11} \mathfrak{i} + \mathfrak{G}_{12} \mathfrak{i}'] dV_\eta \\ \mathfrak{H}(\mathfrak{x}) &= \frac{1}{3i\omega\mu} \mathfrak{i}'(\mathfrak{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_G [\mathfrak{G}_{21} \mathfrak{i} + \mathfrak{G}_{22} \mathfrak{i}'] dV_\eta \end{aligned}$$

in allen inneren Punkten von G die Maxwellschen Gleichungen

$$(4.76) \quad \begin{aligned} V \times \mathfrak{H} + i\omega\varepsilon \mathfrak{E} &= \mathfrak{j} \\ V \times \mathfrak{E} - i\omega\mu \mathfrak{H} &= -\mathfrak{j}'. \end{aligned}$$

Die Felder $\mathfrak{E}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{H}(\mathfrak{x})$ sind im abgeschlossenen Bereich G stetig und es gilt die Randbedingung

$$(4.77) \quad \mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = \mathfrak{v} \quad \text{auf } F.$$

Zum Beweis schreiben wir die Felder gemäß Lemma 1 und 2 in der Form

$$(4.78) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}^* + \frac{1}{4\pi} \int_G (\mathfrak{R}_{11} \mathfrak{j} + \mathfrak{R}_{12} \mathfrak{j}') dV = \mathfrak{E}^* + \mathfrak{E}^{**} \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}^* + \frac{1}{4\pi} \int_G (\mathfrak{R}_{21} \mathfrak{j} + \mathfrak{R}_{22} \mathfrak{j}') dV = \mathfrak{H}^* + \mathfrak{H}^{**}, \end{aligned}$$

und erhalten nach Lemma 1 zunächst

$$(4.79) \quad V \times \mathfrak{H}^* + i\omega \varepsilon \mathfrak{E}^* = \mathfrak{j}, \quad V \times \mathfrak{E}^* - i\omega \mu \mathfrak{H}^* = -\mathfrak{j}'.$$

Da (für $\mathfrak{x} \in G$, $\mathfrak{x} \notin F$) die kompensierenden Tensoren stetig differenzierbar sind, folgt nach Gl. (3.5) ferner

$$(4.80) \quad V \times \mathfrak{H}^{**} + i\omega \varepsilon \mathfrak{E}^{**} = \mathfrak{v}, \quad V \times \mathfrak{E}^{**} - i\omega \mu \mathfrak{H}^{**} = \mathfrak{v}.$$

Aus Gl. (79) und (80) ergibt sich Gl. (76).

Zum Nachweis der zweiten Behauptung des Satzes zerlegen wir das Gebiet G in die Teile G_ϱ und $G_1 = G - G_\varrho$. Zu G_ϱ zählen wir alle Punkte $\mathfrak{y} \in G$ mit $|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}'| \leq \varrho$ ($\mathfrak{x}' \in F$). Wir setzen $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'| \leq \frac{\varrho}{2}$ ($\mathfrak{x} \in G$) und bilden

$$(4.81) \quad \begin{aligned} 4\pi \mathfrak{E}(\mathfrak{x}) &= \int_{G_1} (\mathfrak{G}_{11} \mathfrak{j} + \mathfrak{G}_{12} \mathfrak{j}') dV + \int_{G_\varrho} (\mathfrak{G}_{11} \mathfrak{j} + \mathfrak{G}_{12} \mathfrak{j}') dV + \frac{4\pi}{3i\omega\varepsilon} \mathfrak{j} \\ &= 4\pi \mathfrak{E}_1 + 4\pi \mathfrak{E}_\varrho. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Tensoren in G_1 folgt zunächst

$$(4.82) \quad \lim_{\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x}'} \mathfrak{n}(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{E}_1(\mathfrak{x}) = \mathfrak{v}.$$

Den Anteil \mathfrak{E}_ϱ schätzen wir ab, wobei wir uns nur mit den wie R^{-3} singulär werdenden Anteilen zu befassen haben. Nach Lemma 1 und 2 und Satz 6 und 7 ist

$$(4.83) \quad \begin{aligned} &-8\pi^2 i\omega \varepsilon \mathfrak{n}(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{E}_\varrho(\mathfrak{x}) \\ &= \int_{G_\varrho} \mathfrak{n}(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{h}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) dV_\mathfrak{y} + 2\pi \mathfrak{n}(\mathfrak{x}') \times \int_{F(G_\varrho)} (\mathfrak{n}(\mathfrak{j}) V_\mathfrak{y} \Phi dF_\mathfrak{y} + O(|\varrho|). \end{aligned}$$

Dabei ist $F(G_\varrho)$ die Randfläche des Gebietes G_ϱ und

$$(4.84) \quad \mathfrak{h}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \int_F [\mathfrak{n}(\mathfrak{z}) \times V_\mathfrak{z} (\mathfrak{i}(\mathfrak{y}) V_\mathfrak{z} \Phi)] \times V_\mathfrak{z} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) dF_\mathfrak{z}.$$

Wir setzen

$$(4.85) \quad \begin{aligned} \mathfrak{h}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= (\mathfrak{j}(\mathfrak{y}) V_\mathfrak{y}) \mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \quad \text{mit} \\ \mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= - \int_F (\mathfrak{n}(\mathfrak{z}) \times V_\mathfrak{z} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{y})) \times V_\mathfrak{z} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) dF_\mathfrak{z}. \end{aligned}$$

Es folgt daher

$$(4.86) \quad \int_{G_\varrho} \mathfrak{h}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) dV_\mathfrak{y} = \int_{F(G_\varrho)} (\mathfrak{n}(\mathfrak{y}) \mathfrak{j}(\mathfrak{y})) \mathfrak{p} dF_\mathfrak{y} - \int_{G_\varrho} (V \mathfrak{j}) \mathfrak{p} dV_\mathfrak{y}.$$

Nach Lemma 9 ist $|\mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| = O(R^{-2})$, d. h.

$$(4.87) \quad -8\pi^2 i \omega \varepsilon n(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{G}_\varrho(\mathfrak{x}) = n(\mathfrak{x}') \times \int_{F(G_\varrho)} (n \mathfrak{j}) \left(\mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + 2\pi V_\mathfrak{y} \Phi \right) dF_\mathfrak{y} + O(|\sqrt{\varrho}|).$$

Dabei verstehen wir unter $\mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ den Grenzwert, den $\mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ annimmt, wenn \mathfrak{y} gegen die Randfläche F strebt. Wir haben den Ausdruck

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + 2\pi V_\mathfrak{y} \Phi$$

genauer zu diskutieren und können hierbei $k=0$ setzen.

Zu \mathfrak{y} betrachten wir den Spiegelpunkt \mathfrak{y}^* , der durch die Gleichungen $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}' - \gamma n(\mathfrak{y}')$ und $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{y}' + \gamma n(\mathfrak{y}')$ ($\mathfrak{y}' \in F$) für genügend nahe an F gelegene Punkte \mathfrak{y} , d. h. für genügend kleines ϱ , eindeutig bestimmt ist. Das Feld

$$\mathfrak{p}^*(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 2\pi V_\mathfrak{x} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}^*|}$$

erfüllt bei festem $\mathfrak{y} \in G$ die Differentialgleichungen

$$V_\mathfrak{x} \mathfrak{p}^* = 0, \quad V_\mathfrak{x} \times V_\mathfrak{x} \times \mathfrak{p}^*(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0,$$

ebenso wie das Feld $\mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ für $k=0$. Beide Felder sind durch die Tangentialkomponenten ihrer Randwerte eindeutig bestimmt und nach Lemma 6, 7 und 9 gilt daher

$$(4.88) \quad \mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 2\pi V_\mathfrak{x} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}^*|} + O\left(\frac{1}{R(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}\right).$$

Insgesamt erhalten wir damit aus Gl. (87)

$$(4.89) \quad -4\pi i \omega \varepsilon n(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{G}_\varrho(\mathfrak{x}) = \int_{F(G_\varrho)} (n \mathfrak{j}) n(\mathfrak{x}') \times \left(V_\mathfrak{x} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}^*|} - V_\mathfrak{x} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|} \right) dF_\mathfrak{x} + O(|\sqrt{\varrho}|).$$

Für $\mathfrak{y} \in F$ verschwindet der Integrand, das Integral erstreckt sich daher lediglich über den in G gelegenen Teil der Kugelfläche $|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}| = \varrho$. Hier ist

$$(4.90) \quad n(\mathfrak{x}') \times \left(V_\mathfrak{x} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}^*|} - V_\mathfrak{x} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|} \right) = O\left(\frac{|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'|}{\varrho^3} + \frac{1}{\varrho}\right).$$

und wir erhalten die Abschätzung

$$(4.91) \quad |i \omega \varepsilon n(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{G}_\varrho(\mathfrak{x})| = O\left(\frac{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}|}{\varrho} + |\sqrt{\varrho}|\right).$$

Ist also $|\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}| \leq |\sqrt{\varrho}|$, so ist

$$(4.92) \quad |n(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{G}_\varrho(\mathfrak{x})| = O(|\sqrt{\varrho}|).$$

Aus Gl. (82) und (92) folgt

$$\lim_{\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x}'} n(\mathfrak{x}') \times \mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = 0.$$

Es ist nach Vorstehendem auch klar, daß das Feld $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ im abgeschlossenen Bereich \bar{G} stetig ist. Denn bis auf in \bar{G} stetige Felder ist analog zu Gl. (87)

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = \frac{i}{8\pi^2 \omega \varepsilon} \int_F (n \mathfrak{j}) (2\pi V_\mathfrak{y} \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \mathfrak{p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) dF_\mathfrak{y} + \dots$$

Dieses Feld ist aber ebenfalls im abgeschlossenen Bereich \bar{G} stetig, da für $\eta \in F$ nach Gl. (88)

$$|2\pi V_\eta \Phi(x, \eta) + p(x, \eta)| = O\left(\frac{1}{|x - \eta|}\right)$$

ist. Eine entsprechende Überlegung zeigt, daß auch das Feld $\mathfrak{H}(x)$ in \bar{G} stetig ist. Der hierüber entscheidende Anteil wird durch die Summe der Randintegrale

$$\mathfrak{H}^1(x) = \frac{i}{4\pi\omega\mu} \int_F (j' n) V_\eta \Phi dF_\eta$$

und

$$\mathfrak{H}^2(x) = \frac{i}{8\pi^2\omega\mu} \int_F (j' n) \tilde{p}(x, \eta) dF_\eta$$

geliefert, wobei

$$\tilde{p}(x, \eta) = \int_F \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial n_\xi} V_\xi \Phi(\xi, x) dF_\xi$$

ist, und \tilde{p} den Grenzwert für $\eta \rightarrow \eta' \in F$ bezeichnet. Das erste Integral (\mathfrak{H}^1) entsteht nach Lemma 1 und 2 durch Umformung des Tensors \mathfrak{G}_{22}^* , während das zweite (\mathfrak{H}^2) durch eine analoge Umformung wie in Gl. (70) aus dem wie $1/R^3$ singular werdenden Anteil des Tensors \mathfrak{K}_{22} hervorgeht. Obwohl für die Stetigkeit von $\mathfrak{H}^1(x)$ allein die Stetigkeit von j' nicht ausreicht, ist

$$\mathfrak{H}^1 + \mathfrak{H}^2 = \frac{i}{8\pi^2\omega\mu} \int_F (j' n) (2\pi V_\eta \Phi + \tilde{p}) dF_\eta$$

bei stetigem j' stetig. Wie im Fall des \mathfrak{E} -Feldes ist nämlich auch hier für $\eta' \in F$:

$$|2\pi V_{\eta'} \Phi(x, \eta) + \tilde{p}(x, \eta)| = O\left(\frac{1}{|x - \eta'|}\right).$$

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Für die in Satz 5 eingeführten ausgearteten Tensoren gilt entsprechend

Satz 9. In G seien die Vektorfelder j , j' und ihre Divergenzen definiert und stetig. Setzen wir

$$\mathfrak{E}_1 = -\frac{1}{3} j(x) + \frac{1}{4\pi} \oint_G \mathfrak{G}_{11}(x, \eta; 0) j(\eta) dV_\eta$$

(4.93)

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_G \mathfrak{G}_{21}(x, \eta; 0) j(\eta) dV_\eta,$$

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_G \mathfrak{G}_{12}(x, \eta; 0) j'(\eta) dV_\eta$$

(4.94)

$$\mathfrak{H}_2 = -\frac{1}{3} j'(x) + \frac{1}{4\pi} \oint_G \mathfrak{G}_{22}(x, \eta; 0) j'(\eta) dV_\eta,$$

so gelten in allen inneren Punkten von G die Gleichungen

$$\nabla \times \mathfrak{H}_1 + i \mathfrak{E}_1 = j, \quad \nabla \cdot \mathfrak{H}_1 = 0$$

(4.95)

$$\nabla \times \mathfrak{E}_1 = 0,$$

$$\nabla \times \mathfrak{E}_2 - i \mathfrak{H}_2 = -j', \quad \nabla \cdot \mathfrak{E}_2 = 0$$

(4.96)

$$\nabla \times \mathfrak{H}_2 = 0.$$

Die Felder \mathfrak{E}_k und \mathfrak{H}_k ($k=1, 2$) sind in \bar{G} stetig und es gelten auf F die Randbedingungen

$$n \times \mathfrak{E}_1 - n \times \mathfrak{E}_2 = 0, \quad n \mathfrak{H}_1 = 0.$$

§ 5. Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen

Eigenschwingungen existieren nach Satz 3 nur, falls ω , ε und μ reell sind. Wir können in diesem Fall die Maxwell'schen Gleichungen

$$(5.1) \quad \nabla \times \mathfrak{E} - i\omega\mu\mathfrak{H} = 0, \quad \nabla \times \mathfrak{H} + i\omega\varepsilon\mathfrak{E} = 0$$

durch die Substitutionen

$$(5.2) \quad \mathfrak{H} = \sqrt{\varepsilon} \hat{\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{E} = \sqrt{\mu} \hat{\mathfrak{E}}, \quad \omega \sqrt{\varepsilon\mu} = \hat{\omega}$$

zu

$$(5.3) \quad \nabla \times \hat{\mathfrak{E}} - i\hat{\omega} \hat{\mathfrak{H}} = 0, \quad \nabla \times \hat{\mathfrak{H}} + i\hat{\omega} \hat{\mathfrak{E}} = 0$$

normieren, und setzen daher weiterhin $\varepsilon = \mu = 1$ voraus.

Wir beweisen nunmehr einige allgemeine Eigenschaften über Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen und bemerken zunächst, daß mit ω auch $-\omega$ ein Eigenwert gleicher Vielfachheit des Randwertproblems

$$(5.4) \quad \nabla \times \mathfrak{E} - i\omega\mathfrak{H} = 0, \quad \nabla \times \mathfrak{H} + i\omega\mathfrak{E} = 0$$

$n \times \mathfrak{E} = 0$ auf F ist. Denn sind \mathfrak{E} , \mathfrak{H} Eigenschwingungen zum Eigenwert ω , so sind $\bar{\mathfrak{E}}$, $\bar{\mathfrak{H}}$ Eigenschwingungen zum Eigenwert $-\omega$. Wir können uns daher in der weiteren Diskussion auf positive Werte von ω beschränken. Im Fall $\omega = 0$ zerfällt das Differentialgleichungssystem. Wir schließen diesen Fall zunächst aus.

Es gilt nun¹

Lemma 10. *Eigenschwingungen zu verschiedenen (positiven) Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis. ω_1, ω_2 seien Eigenwerte. Aus den Relationen

$$(5.5) \quad \nabla \times \mathfrak{E}_\nu = i\omega_\nu \mathfrak{H}_\nu, \quad \nabla \times \mathfrak{H}_\nu = -i\omega_\nu \mathfrak{E}_\nu$$

und der Randbedingung $n \times \mathfrak{E}_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2$) folgt

$$(5.6) \quad \int_G \nabla(\bar{\mathfrak{E}}_1 \times \mathfrak{H}_2) dV = \int_F (n \times \bar{\mathfrak{E}}_1) \mathfrak{H}_2 dF = 0$$

und

$$(5.7) \quad \int_G \nabla(\mathfrak{E}_2 \times \bar{\mathfrak{H}}_1) dV = \int_F (n \times \mathfrak{E}_2) \bar{\mathfrak{H}}_1 dF = 0,$$

also

$$(5.8) \quad \omega_1 \int_G \bar{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{H}_2 dV = \omega_2 \int_G \bar{\mathfrak{E}}_1 \mathfrak{E}_2 dV,$$

$$(5.9) \quad \omega_2 \int_G \bar{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{H}_2 dV = \omega_1 \int_G \bar{\mathfrak{E}}_1 \mathfrak{E}_2 dV.$$

Für $\omega_1^2 - \omega_2^2 \neq 0$ folgt daraus wie behauptet

$$(5.10) \quad \int_G \bar{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{H}_2 dV = \int_G \bar{\mathfrak{E}}_1 \mathfrak{E}_2 dV = 0.$$

¹ Vgl. z. B. [5], S. 78 ff.

Für $\omega_1 = \omega_2 \neq 0$ ergibt sich aus Gl. (8), (9) eine Normierungsbeziehung für Eigenschwingungen:

$$(5.11) \quad \int_G |\mathfrak{E}|^2 dV = \int_G |\mathfrak{H}|^2 dV.$$

Für die Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen unseres Problems wollen wir jetzt eine Integralgleichung aufstellen. Im Fall $\omega = i\tau$ mit reellem $\tau \geq 0$ existieren nach Satz 4 und Satz 5 Greensche Tensoren $\mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau)$. Bilden wir mit konstantem \mathfrak{a} die Felder

$$(5.12) \quad \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau) \mathfrak{a}$$

und

$$(5.13) \quad \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau) \mathfrak{a},$$

so erfüllen sie in $G - K'_\eta$ die Gleichungen

$$(5.14) \quad \nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{E}_0 + \tau^2 \mathfrak{E}_0 = 0,$$

$$(5.15) \quad \nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{H}_0 + \tau^2 \mathfrak{H}_0 = 0,$$

und auf F die Randbedingungen

$$(5.16) \quad \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_0 = 0, \quad \mathfrak{n} \times \nabla \times \mathfrak{H}_0 = 0.$$

Die Gln. (14) bis (16) bleiben auch für $\tau=0$ bestehen. Wir nehmen an, ω sei Eigenfrequenz und \mathfrak{E} , \mathfrak{H} zugehörige Eigenschwingungen. Dann gilt

$$(5.17) \quad \nabla \times \mathfrak{E} - i\omega \mathfrak{H} = 0, \quad \nabla \times \mathfrak{H} + i\omega \mathfrak{E} = 0,$$

und $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = 0$ auf F . Wir betrachten den Ausdruck

$$(5.18) \quad \int_{G-K'_\eta} (\mathfrak{E}_0 \cdot \nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \cdot \nabla_{\mathfrak{x}} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{E}_0) dV_{\mathfrak{x}} = (\omega^2 + \tau^2) \int_{G-K'_\eta} (\mathfrak{E}_0 \mathfrak{E}) dV_{\mathfrak{x}}.$$

Nach dem Gaußschen Satz folgt bei Beachtung der Randbedingungen

$$(5.19) \quad \mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_0 = 0$$

auf F :

$$(5.20) \quad (\omega^2 + \tau^2) \int_{G-K'_\eta} (\mathfrak{E}_0 \mathfrak{E}) dV_{\mathfrak{x}} = \int_{F'_\eta} \mathfrak{n} [\mathfrak{E} \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_0 \times \nabla_{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{E}] dF_{\mathfrak{x}}.$$

Lassen wir jetzt $\tau \rightarrow 0$ streben und berücksichtigen nach Lemma 3 und 4 die Singularitäten des Feldes \mathfrak{E}_0

$$(5.21) \quad \mathfrak{E}_0 = -\nabla_{\mathfrak{x}} \Phi \times \mathfrak{a} + \dots,$$

so erhalten wir

$$(5.22) \quad (\omega^2 + \tau^2) \int_G (\mathfrak{E}_0 \mathfrak{E}) dV_{\mathfrak{x}} = -4\pi i\omega \mathfrak{a} \mathfrak{H}(\mathfrak{y}).$$

In Gl. (22) ist \mathfrak{a} ein beliebiger konstanter Vektor, wir können sie daher auch in der Form

$$(5.23) \quad (\omega^2 + \tau^2) \int_G \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; i\tau) \mathfrak{E}(\mathfrak{x}) dV_{\mathfrak{x}} = -4\pi i\omega \mathfrak{H}(\mathfrak{y}),$$

bzw. unter Benutzung von Satz 4 oder Satz 5 in der Form

$$(5.24) \quad (\omega^2 + \tau^2) \int_G \mathfrak{G}_{21}(\eta, \xi; i\tau) \mathfrak{G}(\xi) dV_\xi = 4\pi i\omega \mathfrak{H}(\eta)$$

schreiben. Analog ergibt sich aus dem Ansatz

$$(5.25) \quad \int_{G-K_\eta^r} (\mathfrak{H}_0 V_\xi \times V_\xi \times \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \cdot V_\xi \times V_\xi \times \mathfrak{H}_0) dV_\xi = (\omega^2 + \tau^2) \int_{G-K_\eta^r} (\mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}) dV_\xi$$

bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$n \times V_\xi \times \mathfrak{H} = n \times V_\xi \times \mathfrak{H}_0 = 0 \quad \text{auf } F$$

und der Singularitäten des Feldes \mathfrak{H}_0

$$\mathfrak{H}_0 = V_\xi \Phi \times a + \dots$$

die Relation

$$(5.26) \quad (\omega^2 + \tau^2) \int_G \mathfrak{G}_{12}(\eta, \xi; i\tau) \mathfrak{H}(\xi) dV_\xi = 4\pi i\omega \mathfrak{G}(\eta).$$

Setzen wir

$$(5.27) \quad \mathfrak{L}(\xi, \eta; i\tau) = \frac{1}{4\pi} \left(\begin{matrix} \mathfrak{D} & -\mathfrak{G}_{12}(\xi, \eta; i\tau) \\ \mathfrak{G}_{21}(\xi, \eta; i\tau) & \mathfrak{D} \end{matrix} \right),$$

wobei \mathfrak{D} die dreireihige Nullmatrix ist, und fassen die Eigenschwingungen gemäß

$$(5.28) \quad p(\xi) = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}(\xi) \\ i\mathfrak{H}(\xi) \end{pmatrix}$$

zu einem sechsdimensionalen Vektor zusammen, so können wir für Gl. (24) und (26)

$$(5.29) \quad \frac{\omega^2 + \tau^2}{\omega} \int_G \mathfrak{L}(\xi, \eta; i\tau) p(\eta) dV_\eta = p(\xi)$$

schreiben. Jede Eigenschwingung des Randwertproblems — nach Gl. (28) zusammengefaßt — ist eine Lösung dieser Integralgleichung. Nach Satz 1, 2 und 5 ist der Kern $\mathfrak{L}(\xi, \eta; i\tau)$ reell und symmetrisch

$$(5.30) \quad \mathfrak{L}^\sim(\xi, \eta; i\tau) = \mathfrak{L}(\eta, \xi; i\tau)$$

seine Elemente sind von der Ordnung $O\left(\frac{1}{|\xi - \eta|^2}\right)$. Der iterierte Kern ist daher ebenfalls reell, symmetrisch, quadratintegrabel und nicht ausgeartet. Nach einer bekannten Schlußweise von HILBERT [8], S. 69, besitzt daher die Integralgleichung (29) abzählbar unendlich viele Eigenwerte und zugehörige Eigenlösungen. Wir haben noch zu zeigen, daß jede Eigenlösung der Integralgleichung (29) auch Eigenschwingung unseres Randwertproblems ist.

Wir beweisen zunächst

Lemma 11. *Der Kern*

$$(5.31) \quad \mathfrak{L}_2(\xi, \eta; i\tau) = \int_G \mathfrak{L}(\xi, \zeta; 0) \mathfrak{L}(\zeta, \eta; i\tau) dV_\zeta$$

ist reell, symmetrisch und quadratintegrabel.

Da $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 0)$ und $\mathfrak{L}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; \epsilon \tau)$ reell und von der Ordnung

$$O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{z}|^2}\right) \quad \text{bzw.} \quad O\left(\frac{1}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|^2}\right)$$

sind, ist der Kern \mathfrak{L}_2 reell und von der Ordnung $O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\right)$, d.h. quadratintegrabel. Aus Gl. (30) folgt weiterhin

$$(5.32) \quad \mathfrak{L}_2^{\sim}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; \epsilon \tau) = \int_G \mathfrak{L}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}; \epsilon \tau) \mathfrak{L}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 0) dV_{\mathfrak{z}},$$

so daß wir zum Nachweis der Symmetrie lediglich die Relation

$$(5.33) \quad \int_G \mathfrak{L}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \epsilon \tau) \mathfrak{L}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; 0) dV_{\mathfrak{z}} = \int_G \mathfrak{L}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 0) \mathfrak{L}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; \epsilon \tau) dV_{\mathfrak{z}},$$

bzw.

$$(5.34) \quad \int_G \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \epsilon \tau) \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; 0) dV_{\mathfrak{z}} = \int_G \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 0) \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; \epsilon \tau) dV_{\mathfrak{z}}$$

und

$$(5.35) \quad \int_G \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \epsilon \tau) \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; 0) dV_{\mathfrak{z}} = \int_G \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 0) \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; \epsilon \tau) dV_{\mathfrak{z}}$$

nachzuweisen haben.

Es sei $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein in G stetig differenzierbares Feld. Setzen wir zur Abkürzung ($\tau \geq 0$)

$$(5.36) \quad \frac{1}{4\pi} \oint_G \mathfrak{G}_{ik}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; \epsilon \tau) \mathfrak{f}(\mathfrak{y}) dV_{\mathfrak{y}} = \mathfrak{G}_{ik}^{\tau} \mathfrak{f},$$

und bilden die Felder

$$(5.37) \quad \begin{aligned} \mathfrak{H}_2 &= \mathfrak{G}_{21}^{\tau} \mathfrak{f}, & \mathfrak{H}_2^* &= \mathfrak{G}_{21}^0 \mathfrak{f} \\ \mathfrak{E}_2 &= -\frac{1}{3\tau} \mathfrak{f} + \mathfrak{G}_{11}^{\tau} \mathfrak{f}, & \mathfrak{E}_2^* &= -\frac{1}{3} \mathfrak{f} + \mathfrak{G}_{11}^0 \mathfrak{f} \\ \mathfrak{E}_1 &= \mathfrak{G}_{12}^0 \mathfrak{H}_2, & \mathfrak{E}_1^* &= \mathfrak{G}_{12}^{\tau} \mathfrak{H}_2^* \\ \mathfrak{H}_1 &= -\frac{1}{3} \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{G}_{22}^0 \mathfrak{H}_2, & \mathfrak{H}_1^* &= -\frac{1}{3\tau} \mathfrak{H}_2^* + \mathfrak{G}_{22}^{\tau} \mathfrak{H}_2^*, \end{aligned}$$

so ist Gl. (34) gleichbedeutend mit $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1^*$. Nach Satz 8 und 9 gilt aber in G

$$(5.38) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_2 - \tau \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{f}, \quad \nabla \times \mathfrak{H}_2^* + \epsilon \mathfrak{E}_2^* = \mathfrak{f},$$

$$(5.39) \quad \nabla \times \mathfrak{E}_2 + \tau \mathfrak{H}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathfrak{E}_2^* = 0,$$

$$(5.40) \quad \nabla \times \mathfrak{E}_1 - \epsilon \mathfrak{H}_1 = -\mathfrak{H}_2, \quad \nabla \times \mathfrak{E}_1^* + \tau \mathfrak{H}_1^* = -\mathfrak{H}_2^*,$$

$$(5.41) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_1 = 0, \quad \nabla \times \mathfrak{H}_1^* - \tau \mathfrak{E}_1^* = 0,$$

sowie $\nabla \mathfrak{E}_1 = \nabla \mathfrak{H}_2^* = 0$. Auf F gelten die Randbedingungen

$$(5.42) \quad \begin{aligned} n \times \mathfrak{E}_\nu &= n \times \mathfrak{E}_\nu^* = 0 & (\nu = 1, 2) \quad \text{und} \\ n \mathfrak{H}_2^* &= n \mathfrak{H}_1 = 0. \end{aligned}$$

Nach Gl. (39) und (40) ist $\nabla \mathfrak{H}_1 = \nabla \mathfrak{H}_2 = 0$, also $\mathfrak{H}_1 = 0$. Eliminieren wir nun aus Gl. (37 bis 41) die übrigen Felder, so erhalten wir für \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_1^*

$$(5.43) \quad \begin{aligned} \nabla_3 \times \mathfrak{E}_1 + \tau^2 \nabla \times \mathfrak{E}_1 &= -\nabla \times \mathfrak{f} \\ \nabla_3 \times \mathfrak{E}_1^* + \tau^2 \nabla \times \mathfrak{E}_1^* &= -\nabla \times \mathfrak{f} \end{aligned}$$

sowie¹

$$(5.44) \quad n \times V_2 \times (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_1^*) = 0 \quad \text{auf } F.$$

Aus Gl. (42 bis 44) folgt unmittelbar $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1^*$ und damit die Behauptung Gl. (34).

Ganz entsprechend beweist man Gl. (35). Wir haben bis jetzt gezeigt, daß die Eigenschwingungen Lösungen der Integralgleichung

$$(5.45) \quad (\omega^2 + \tau^2) \int_G \Omega_2(x, y; i\tau) p(y) dV_y = p(x)$$

sind, deren Kern reell, symmetrisch und quadratintegrabel ist. Wir zeigen nun

Lemma 12. *Jede Eigenlösung der Integralgleichung (45) liefert eine Eigenschwingung des Randwertproblems (5.4).*

Beweis. Es sei $p = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} \\ i\mathfrak{H} \end{pmatrix}$ Eigenlösung, d.h. es gelte — mit normiertem \mathfrak{E} und \mathfrak{H} —

$$(5.46) \quad \begin{aligned} -\sigma \mathfrak{G}_{12}^0 \mathfrak{G}_{21}^\tau \mathfrak{E} &= \mathfrak{E} \\ -\sigma \mathfrak{G}_{21}^0 \mathfrak{G}_{12}^\tau \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Dann gibt es auch Zahlen σ_1 und σ_2 mit $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma$, so daß

$$(5.47) \quad \begin{aligned} \sigma_1 \mathfrak{G}_{21}^\tau \mathfrak{E} &= i\mathfrak{H} \\ -i\sigma_2 \mathfrak{G}_{12}^0 \mathfrak{H} &= \mathfrak{E} \end{aligned}$$

ist ([8], S. 69).

Aus Gl. (47) lesen wir ab, daß die Divergenz der stetigen Felder \mathfrak{E} , \mathfrak{H} in G verschwindet². Bilden wir daher

$$(5.48) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= -i\sigma_2 \mathfrak{G}_{12}^0 \mathfrak{H} \\ \mathfrak{H}_2 &= -i\sigma_2 \left(-\frac{1}{3} \mathfrak{H} + \mathfrak{G}_{22}^0 \mathfrak{H} \right) \\ \mathfrak{E}_2 &= -i\sigma_1 \left(-\frac{1}{3\tau} \mathfrak{E} + \mathfrak{G}_{11}^\tau \mathfrak{E} \right) \\ \mathfrak{H}_1 &= -i\sigma_1 \mathfrak{G}_{21}^\tau \mathfrak{E}, \end{aligned}$$

so ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ und $n \times \mathfrak{E}_1 = n \times \mathfrak{E}_2 = 0$ auf F . Ferner gilt nach Satz 8 und 9

$$(5.49) \quad \begin{aligned} V \times \mathfrak{E}_1 - i\mathfrak{H}_2 &= i\sigma_2 \mathfrak{H}_1, & V \mathfrak{E}_1 &= 0 \\ V \times \mathfrak{H}_2 &= 0 \\ V \times \mathfrak{E}_2 + \tau \mathfrak{H}_1 &= 0 \\ V \times \mathfrak{H}_1 - \tau \mathfrak{E}_2 &= -i\sigma_1 \mathfrak{E}_1. \end{aligned}$$

Wegen $V \mathfrak{H}_2 - V \mathfrak{H}_1 = 0$ und $n \mathfrak{H}_2 = 0$ auf F folgt zunächst wieder $\mathfrak{H}_2 \equiv 0$, d.h.

$$(5.50) \quad \begin{aligned} V \times \mathfrak{E}_1 - i\sigma_2 \mathfrak{H}_1 &= 0 \\ V \times \left(V \times \mathfrak{H}_1 - i\frac{\tau^2 - \sigma}{\sigma_2} \mathfrak{E}_1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

¹ $V_n \times \mathfrak{E}$ ($n=1, 2, \dots$) soll die n -malige Anwendung des Operators rot andeuten.

² Vgl. [II], Lemma 5.

Da ferner in $G \nabla \mathfrak{E}_1 = 0$ und auf F auch $n \times \nabla \times \mathfrak{H}_1 = 0$ ist, erhalten wir schließlich

$$(5.51) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathfrak{E}_1 - i\sigma_2 \mathfrak{H}_1 &= 0 \\ \nabla \times \mathfrak{H}_1 + i \frac{\sigma - \tau^2}{\sigma_2} \mathfrak{E}_1 &= 0, \quad n \times \mathfrak{E}_1 = 0 \quad \text{auf } F. \end{aligned}$$

Bei nicht identisch verschwindenden Feldern $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ kann dieses Gleichungssystem aber nur bestehen, wenn $\sigma - \tau^2 = \omega^2$ für eine Eigenfrequenz ω ist.

Wegen der Normierung ist ferner $\sigma_2 = \omega = \pm \sqrt{\sigma - \tau^2}$, d.h. $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ sind Eigenschwingungen zur Eigenfrequenz ω . Da der — positiv definite — Kern $\mathfrak{Q}_2(x, y; g, \tau)$ quadratintegabel ist, gilt schließlich ein Entwicklungssatz für die durch ihn quellenmäßig dargestellten Felder. Wir formulieren unsere Ergebnisse in folgendem

Satz 10. *Den Eigenlösungen der Integralgleichung*

$$(\omega^2 + \tau^2) \int_G \mathfrak{Q}_2(x, y; i\tau) \mathfrak{p}(y) dV_y = \mathfrak{p}(x)$$

mit reell-symmetrischem, quadratintegablem und positiv definitem Kern entsprechen umkehrbar eindeutig die Eigenschwingungen des Randwertproblems. Es gibt eine abzählbar unendliche Folge von Eigenfrequenzen $\omega_n \neq 0$, die sich im Endlichen nicht häuft.

Jeder Eigenfrequenz ω_n entspricht eine Eigenfrequenz $-\omega_n$ gleicher Vielfachheit, wobei die Eigenschwingungen zur Eigenfrequenz $-\omega_n$ konjugiert komplex zu denen von ω_n sind.

Jedes Feld $\mathfrak{f}(x)$, das mittels des quadratintegablen Feldes q durch

$$\mathfrak{f}(x) = \int_G \mathfrak{Q}_2(x, y; i\tau) q(y) dV_y$$

quellenmäßig darstellbar ist, kann in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenlösungen \mathfrak{p}_n entwickelt werden.

§ 6. Asymptotische Gesetze für Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen

Wir wollen in diesem Paragraphen asymptotische Gesetze für die Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen der Hohlraumstrahlung herleiten. Dazu untersuchen wir das Verhalten der Tensoren $\mathfrak{G}_{12}(x, y; i\tau)$ und $\mathfrak{G}_{21}(x, y; i\tau)$ für $\tau \rightarrow \infty$, aus dem wir auf asymptotische Gesetze für die Eigenschwingungen und Eigenfrequenzen schließen können. Setzen wir zur Abkürzung

$$(6.1) \quad \mathfrak{G}_E(x, y; i\tau) = - \frac{1}{(4\pi)^2} \int_G \mathfrak{G}_{12}(x, \mathfrak{z}; 0) \mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{z}, y; i\tau) dV_{\mathfrak{z}},$$

$$(6.2) \quad \mathfrak{G}_H(x, y; i\tau) = - \frac{1}{(4\pi)^2} \int_G \mathfrak{G}_{21}(x, \mathfrak{z}; 0) \mathfrak{G}_{12}(\mathfrak{z}, y; i\tau) dV_{\mathfrak{z}},$$

so ist

$$(6.3) \quad \mathfrak{Q}_2(x, y; i\tau) = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_E & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{G}_H \end{pmatrix}$$

und aus Satz 9 folgen in bekannter Weise¹ Entwicklungssätze für die Tensoren $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{G}_E$ und \mathfrak{G}_H .

¹ Vgl. [3], S. 114 ff., [16], S. 227 ff.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir dabei wieder

$$p_n(x) = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_n(x) \\ i \mathfrak{H}_n(x) \end{pmatrix}$$

setzen, also unter $p_n(x)$ einen 6-dimensionalen Vektor verstehen, der sich aus den Eigenschwingungen $\mathfrak{E}_n(x)$, $\mathfrak{H}_n(x)$ in der angegebenen Weise zusammensetzt. Ferner verstehen wir unter $p_n(x) \bar{p}_n(y)$ die 6-reihige Matrix, die sich ergibt, wenn man die Spalte $p_n(x)$ mit der Zeile $\bar{p}_n(y)$ nach den Regeln der Matrizenrechnung multipliziert. Dann gilt

Satz 11. Sind $\mathfrak{E}_n(x)$, $\mathfrak{H}_n(x)$ die orthonormierten Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_n \neq 0$, und ist

$$p_n = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_n \\ i \mathfrak{H}_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$(6.4) \quad \mathfrak{Q}_2(x, y; 0) - \mathfrak{Q}_2(x, y; i\tau) = \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x) \bar{p}_n(y)}{\omega_n^2 (\omega_n^2 + \tau^2)}$$

oder — damit gleichbedeutend —

$$(6.5) \quad \mathfrak{G}_E(x, y; 0) - \mathfrak{G}_E(x, y; i\tau) = \tau^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{E}_n(x) \bar{\mathfrak{E}}_n(y)}{\omega_n^2 (\omega_n^2 + \tau^2)},$$

$$(6.6) \quad \mathfrak{G}_H(x, y; 0) - \mathfrak{G}_H(x, y; i\tau) = \tau^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{H}_n(x) \bar{\mathfrak{H}}_n(y)}{\omega_n^2 (\omega_n^2 + \tau^2)},$$

wobei \sum' bedeutet, daß nur über die positiven Eigenfrequenzen ω_n zu summieren ist. Die Reihen Gl. (4), (5), (6) konvergieren für alle x und y aus G gleichmäßig.

Wir wollen nunmehr auf beiden Seiten der Gl. (5) und (6) die Spur (also die Summe der Hauptdiagonalelemente) bilden und speziell das Verhalten der Spur für $\tau \rightarrow \infty$ untersuchen. Wir zeigen zunächst

Lemma 13. Es ist

$$(6.7) \quad \lim_{y \rightarrow x} \text{Spur} (\mathfrak{G}_E(x, y; 0) - \mathfrak{G}_E(x, y; i\tau)) = \frac{\tau}{2\pi} + O\left(\frac{1}{R_x^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$(6.8) \quad \lim_{y \rightarrow x} \text{Spur} (\mathfrak{G}_H(x, y; 0) - \mathfrak{G}_H(x, y; i\tau)) = \frac{\tau}{2\pi} + O\left(\frac{1}{R_x^{\frac{3}{2}}}\right),$$

wobei R_x die kürzeste Entfernung von x zu F ist und die Abschätzung gleichmäßig bezüglich aller $\tau \geq \tau_0$ gilt.

Beweis. Berücksichtigen wir nach Gl. (2.3) und (3.32) die Singularitäten der Tensoren \mathfrak{G}_{12} und \mathfrak{G}_{21} , so erhalten wir

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \text{Spur} \int_G \mathfrak{G}_{12}(x, \xi; 0) \mathfrak{G}_{21}(\xi, y; i\tau) dV_\xi &= -2 \int_G V_\xi \frac{1}{|\xi - x|} V_\xi \Phi(\xi, y) dV_\xi + \\ &+ O\left(\int_G |\mathfrak{R}_{12}(x, \xi; 0)| \cdot |\mathfrak{G}_{21}(\xi, y; i\tau)| dV_\xi\right) + O\left(\int_G |\mathfrak{R}_{21}(\xi, y; i\tau)| \frac{1}{|\xi - x|^2} dV_\xi\right), \end{aligned}$$

Den ersten Summanden formen wir nach dem Gaußschen Integralsatz um und erhalten

$$\begin{aligned}
 \int_G V_{\mathfrak{z}} \frac{1}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{x}|} V_{\mathfrak{z}} \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) dV_{\mathfrak{z}} &= 4\pi \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \int_F \Phi(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{z}}} \frac{1}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{x}|} dF_{\mathfrak{z}} \\
 (6.10) \qquad &= 4\pi \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{y}}} \int_F \left| \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{z}}} \frac{1}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{x}|} \right| dF_{\mathfrak{z}} \right) \\
 &= 4\pi \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{y}}}\right).
 \end{aligned}$$

Nach Satz 6 gilt gleichmäßig für alle $\tau \geq \tau_0$

$$(6.11) \qquad |\overline{\mathfrak{R}}_{21}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; \mathfrak{i}\tau)| = O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}^2}\right),$$

wobei $R_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}$ der Lichtweg zwischen \mathfrak{z} und \mathfrak{y} ist. Da $R_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \geq |\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|$ ist, gilt ferner gleichmäßig für alle $\tau \geq \tau_0$

$$(6.12) \qquad |\mathfrak{G}_{21}(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}; \mathfrak{i}\tau)| = O\left(\frac{1}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|^2}\right).$$

Die weiteren Summanden in Gl. (9) können also durch

$$O\left(\int_G \frac{dV_{\mathfrak{z}}}{R_{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2 |\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|^2}\right) \quad \text{bzw.} \quad O\left(\int_G \frac{dV_{\mathfrak{z}}}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{x}|^2 R_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}^2}\right)$$

abgeschätzt werden. Da $R_{\mathfrak{z}\mathfrak{x}} \geq R_{\mathfrak{x}}$ und $R_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} \geq R_{\mathfrak{y}}$ ist, können diese Ausdrücke auch durch

$$O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{x}}^{\frac{3}{2}}} \int_G \frac{dV_{\mathfrak{z}}}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{x}|^{\frac{1}{2}} |\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|^2}\right) = O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{x}}^{\frac{3}{2}}}\right)$$

bzw.

$$O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{y}}^{\frac{3}{2}}} \int_G \frac{dV_{\mathfrak{z}}}{|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|^{\frac{1}{2}} |\mathfrak{z}-\mathfrak{x}|^2}\right) = O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{y}}^{\frac{3}{2}}}\right)$$

ersetzt werden. Insgesamt ergibt sich nach Gl. (1) und (9)

$$\begin{aligned}
 \text{Spur } (\mathfrak{G}_E(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) - \mathfrak{G}_E(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; \mathfrak{i}\tau)) \\
 (6.13) \qquad &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|} - \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \right) + O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{x}}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{R_{\mathfrak{y}}^{\frac{3}{2}}}\right).
 \end{aligned}$$

Führen wir jetzt den Grenzübergang $\mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{x}$ aus, so folgt

$$(6.14) \qquad \lim_{\mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{x}} \text{Spur } (\mathfrak{G}_E(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; 0) - \mathfrak{G}_E(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; \mathfrak{i}\tau)) = \frac{\tau}{2\pi} + O\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{x}}^{\frac{3}{2}}}\right),$$

wobei die Abschätzung $O(1/R_{\mathfrak{x}}^{\frac{3}{2}})$ gleichmäßig bezüglich aller $\tau \geq \tau_0$ gilt. Die zweite Behauptung von Lemma 13 läßt sich wörtlich ebenso beweisen.

Da nun

$$\text{Spur } \mathfrak{G}_n(\mathfrak{x}) \overline{\mathfrak{G}}_n^{\sim}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{G}_n^{\sim}(\mathfrak{x}) \overline{\mathfrak{G}}_n(\mathfrak{y})$$

und

$$\text{Spur } \mathfrak{G}_n(\mathfrak{x}) \overline{\mathfrak{G}}_n^{\sim}(\mathfrak{x}) = |\mathfrak{G}_n(\mathfrak{x})|^2$$

ist, erhalten wir aus Gl. (5) und (6) folgende asymptotische Relationen für $\tau \rightarrow \infty$ und $x \in G$, $x \notin F$:

$$(6.15) \quad \sum_{\omega_n > 0} \frac{|\xi_n(x)|^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} \sim \frac{1}{2\pi\tau},$$

$$(6.16) \quad \sum_{\omega_n > 0} \frac{|\eta_n(x)|^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} \sim \frac{1}{2\pi\tau}.$$

Wir wollen zeigen, daß diese asymptotischen Relationen über G integriert werden dürfen:

Lemma 14.

$$(6.17) \quad \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} \sim \frac{V}{2\pi\tau},$$

wobei V das Volumen von G ist.

Beweis. Es sei G_δ der Teilbereich von G , für dessen Punkte $x \in G_\delta$: $R_x \geq \delta$ ist. Integrieren wir die Relation

$$(6.18) \quad \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n(x)|^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} - \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\tau} O\left(\frac{1}{R_x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

zunächst über G_δ , so folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für alle $x \in G$ und alle $\tau \geq 0$

$$(6.19) \quad \begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} - \frac{V}{2\pi} \\ = \tau \int_{G-G_\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n(x)|^2}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} dV_x - \frac{1}{2\pi} \int_{G-G_\delta} dV + \frac{1}{\tau} \int_{G_\delta} O\left(\frac{1}{R_x^{\frac{3}{2}}}\right) dV_x. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_{G-G_\delta} dV = O(\delta) \quad \text{und} \quad \int_{G_\delta} O\left(\frac{1}{R_x^{\frac{3}{2}}}\right) dV_x = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$$

d.h. insgesamt

$$(6.20) \quad \left| \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} - \frac{V}{2\pi} \right| = O\left(\delta + \tau\delta + \frac{1}{\tau\sqrt{\delta}}\right).$$

Setzen wir daher $\tau = \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}}$, so ist für $\delta \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$

$$(6.21) \quad \left| \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2(\omega_n^2 + \tau^2)} - \frac{V}{2\pi} \right| = O\left(\frac{1}{\tau^{\frac{1}{4}}}\right),$$

was zu beweisen war.

Wie schon T. CARLEMAN [1], [2] zeigte, folgen nach bekannten Tauberschen Sätzen nunmehr unmittelbar weitere asymptotische Relationen über Eigenfunktionen und Eigenfrequenzen. Wir benutzen ([2], [7], vgl. auch [9], [14]):

Lemma 15. Ist $a_n > 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n}$ konvergent, wobei $\lambda_n > 0$ eine monoton gegen ∞ strebende Folge ist, und gilt mit konstanten $H \neq 0$ und $0 < \varrho < 1$

$$(6.22) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n + x} \sim H x^{-\varrho} \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty$$

so folgt

$$(6.23) \quad \sum_{\lambda_n < t} a_n \sim H \frac{\sin \pi \varrho}{\pi(1-\varrho)} t^{1-\varrho} \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Wenden wir diesen Tauberschen Satz auf Gl. (15, 16, 17) an, so erhalten wir

$$(6.24) \quad \sum_{0 < \omega_n < t} \frac{|\mathfrak{E}_n(x)|^2}{\omega_n^2} \sim \frac{t}{\pi^2},$$

$$(6.25) \quad \sum_{0 < \omega_n < t} \frac{|\mathfrak{H}_n(x)|^2}{\omega_n^2} \sim \frac{t}{\pi^2},$$

$$(6.26) \quad \sum_{0 < \omega_n < t} \frac{1}{\omega_n^2} \sim \frac{V t}{\pi^2}$$

und weiterhin durch partielle Integration

$$(6.27) \quad \sum_{0 < \omega_n < t} |\mathfrak{E}_n(x)|^2 \sim \frac{t^3}{3\pi^2},$$

$$(6.28) \quad \sum_{0 < \omega_n < t} |\mathfrak{H}_n(x)|^2 \sim \frac{t^3}{3\pi^2},$$

$$(6.29) \quad \sum_{0 < \omega_n < t} 1 \sim \frac{V t^3}{3\pi^2}.$$

Gl. (29) ist von H. WEYL [17], [18] auf anderem Wege hergeleitet worden. Berücksichtigen wir bei konstanten ε, μ die Substitutionen Gl. (5.2), so können wir unsere Ergebnisse in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 12. Es seien $\mathfrak{E}_n, \mathfrak{H}_n$ Eigenschwingungen zur Eigenfrequenz ω_n der Maxwell'schen Gleichungen

$$V \times \mathfrak{E} - i\omega \mu \mathfrak{H} = 0, \quad V \times \mathfrak{H} + i\omega \varepsilon \mathfrak{E} = 0 \quad \text{in } G$$

n $\times \mathfrak{E} = 0$ auf F mit positiven Konstanten ε und μ , die durch

$$(6.30) \quad \frac{1}{\mu} \int_G \mathfrak{E}_n \bar{\mathfrak{E}}_m dV = \frac{1}{\varepsilon} \int_G \mathfrak{H}_n \bar{\mathfrak{H}}_m dV = \delta_{nm}$$

orthonormiert sind. Dann gelten folgende asymptotischen Relationen ($x \in G, \tau \rightarrow \infty$)

$$(6.31) \quad \sum_{0 < \omega_n < \tau} \frac{|\mathfrak{E}_n(x)|^2}{\omega_n^2} \sim \mu(\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \frac{\tau}{\pi^2},$$

$$(6.32) \quad \sum_{0 < \omega_n < \tau} \frac{|\mathfrak{H}_n(x)|^2}{\omega_n^2} \sim \varepsilon(\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \frac{\tau}{\pi^2},$$

$$(6.33) \quad \sum_{0 < \omega_n < \tau} |\mathfrak{E}_n(x)|^2 \sim \mu(\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \frac{\tau^3}{3\pi^2},$$

$$(6.34) \quad \sum_{0 < \omega_n < \tau} |\mathfrak{H}_n(x)|^2 \sim \varepsilon(\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \frac{\tau^3}{3\pi^2},$$

$$(6.35) \quad \sum_{0 < \omega_n < \tau} 1 \sim (\varepsilon \mu)^{\frac{3}{2}} \cdot V \cdot \frac{\tau^3}{3\pi^2}.$$

Literatur

- [1] CARLEMAN, T.: Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, C.R. du 8^e Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Sund 1935, S. 34—44.
- [2] CARLEMAN, T.: Über die Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen. Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. **86**, 119 (1936).
- [3] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, Bd. I. Berlin 1931.
- [4] COURANT, R.: Über die Schwingungen eingespannter Platten. Math. Z. **15**, 195 (1922).
- [5] GOUBEAU, G.: Elektromagnetische Wellenleiter und Hohlräume. Stuttgart 1955.
- [6] GÜNTHER, N. M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Leipzig 1957.
- [7] HARDY, G. H., & J. E. LITTLEWOOD: Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems. Proc. Lond. Math. Soc., Ser. II **30**, 23—37 (1930).
- [8] HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig u. Berlin 1912.
- [9] KARAMATA, J.: Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjesche Transformation betreffen. J. reine angew. Math. **164**, 27—39 (1931).
- [10] MÜLLER, CL.: Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Abh. Dtsch. Akademie der Wiss. zu Berlin, 1945/46, Nr. 3.
- [11] MÜLLER, CL.: Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Berlin 1957.
- [12] MÜLLER, CL.: Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Math. Z. **56**, 261 ff. (1952).
- [13] MÜLLER, CL.: Grundoperationen der Vektoranalysis. Math. Ann. **124**, 427 ff. (1952).
- [14] PLEIJEL, A.: On the eigenvalues and eigenfunctions of elastic plates. Comm. on Pure and Appl. Math. **3**, 1 ff. (1950).
- [15] PLEIJEL, A.: Green's functions and asymptotic distributions of eigenvalues and eigenfunctions. Proc. Symposium spectral theory and differential problems, 1955, S. 439—454.
- [16] RIESZ, F., u. B. SZ. NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin 1956.
- [17] WEYL, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). Math. Ann. **71**, 441—479 (1912).
- [18] WEYL, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers. Rend. Circolo Mat. Palermo, **39**, 1—50 (1915).
- [19] WEYL, H.: Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem. Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 115—139 (1950).

Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Rhein.-Westf. Technische Hochschule
Aachen

(Eingegangen am 16. Dezember 1960)

Ein Existenzsatz für die Lösungen gewisser Gleichungen mit Nebenbedingungen bei beschränkter Nichtlinearität

HANS EH RMANN

Vorgelegt von H. COLLATZ

Eine Reihe von Existenzsätzen für die Lösungen von allgemeinen Randwertaufgaben bei gewissen nichtlinearen Gleichungen geben als wesentliche Bedingung für die Lösbarkeit die Existenz einer Lösung von einer zugehörigen linearen Randwertaufgabe an, z. B. in Form des Nichtverschwindens einer Determinante. Dies ist gewöhnlich dann der Fall, wenn die in der Gleichung auftretenden nichtlinearen Ausdrücke durch eine von der Lösung unabhängige Funktion beschränkt werden können. Hierzu gehören vor allem einige grundlegende Arbeiten von ROBERTO CONTI¹ und WILLIAM M. WHYBURN² über die Existenz der Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen mit allgemeinen linearen Randbedingungen.

Wesentlich in den Beweismethoden ist hierbei die Eigenschaft dieser Gleichungen, daß ihre Lösungen durch endlich viele Zahlenwerte c_i ($i=1, \dots, n$) (i. allg. die Anfangswerte) festgelegt werden können, von denen sie stetig abhängen. Die allgemeine Lösung läßt sich dann in Form einer Gleichung $y=F(y(x), c_i)$ formell angeben. In die Randbedingungen eingeführt liefert dies ein Gleichungssystem für die Zahlenwerte c_i , dessen Lösung unter Benutzung der Beschränktheit der auftretenden nichtlinearen Ausdrücke mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes gesichert werden kann.

Hier wird ein entsprechender Satz für gewisse nichtlineare Gleichungen in Banach-Räumen bewiesen, der einige dieser Existenzsätze in verschiedenen Arbeiten als Spezialfälle enthält³ und die Beweise vereinfacht. Es gelingt dadurch, geschlossene Ausdrücke für die Bedingungen der Existenz anzugeben, sowie gleichzeitig auch mögliche allgemeinere Nebenbedingungen, z. B. gewisse nichtlineare Randbedingungen bei nichtlinearen Differentialgleichungssystemen mit zu erfassen.

Die Beschränkung der Nichtlinearität durch ein festes Element, die in dem Satz als wesentliche Voraussetzung auftritt, ist allerdings eine in vielen Fällen zu starke Einschränkung, jedoch kann der Satz als Grundlage weiterer Existenz-

¹ R. CONTI [4], [5], [6].

² W. M. WHYBURN [2], [3], s. auch die dort angegebenen weiteren Literaturstellen.

³ Nicht enthalten sind dagegen die Ergebnisse der Untersuchungen von R. CONTI [6] über gewisse pseudolineare Differentialgleichungssysteme.

sätze dienen, wie dies z. B. H. EPHESER [20] in einem entsprechenden Fall bei speziellen Randwertaufgaben mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchführte.

In einigen Beispielen mit speziellen Gleichungen der betrachteten Art wie nichtlinearen Gleichungssystemen, Differenzgleichungen und vor allem Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen soll die einfache Anwendung des Satzes gezeigt werden. Insbesondere wird der Nachweis periodischer Lösungen der auf höhere Ordnungen verallgemeinerten Duffingschen Differentialgleichung geführt.

1. Wir betrachten Gleichungen der Gestalt

$$(1.1) \quad Lu = Mu$$

mit einem stetigen linearen Operator L und einem stetigen Operator M . Beide Operatoren sind in einem Banach-Raum B_1 definiert, und ihr Wertebereich liegt in einem Banach-Raum B_2 .

Die Operatoren L und M besitzen folgende Eigenschaften:

a) Der Nullraum N von L ist endlich dimensional, d. h. jede Lösung der Gleichung

$$Lu = \Theta_2 \quad (\text{Nullelement in } B_2)$$

läßt sich in der Gestalt

$$u = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$$

mit n linear unabhängigen Elementen $\varphi_v \in B_1$, $v = 1, \dots, n$, der Basis von N , darstellen.

b) Es existiert ein vollstetiger linearer Operator \tilde{L}^{-1} derart, daß die Gleichung

$$Lu = w, \quad w \in B_2$$

durch

$$(1.2) \quad u = \tilde{L}^{-1} w$$

gelöst wird¹ und die Gleichung

$$(1.3) \quad u = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v + \tilde{L}^{-1} Mu$$

für jedes feste System der c_v , $v = 1, \dots, n$, eine eindeutige Lösung besitzt.

c) Ferner existiere eine Zahl m mit

$$(1.4) \quad \|Mu\| \leq m \quad \text{für alle } u \in B_1.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Existenzsatz. Es seien F_μ , $\mu = 1, \dots, n$, stetige lineare Funktionale aus B_1^* (dem konjugierten Raum von B_1) und H_μ , $\mu = 1, \dots, n$, stetige, nicht notwendige lineare Funktionale über B_1 mit der Eigenschaft

$$(1.5) \quad |H_\mu[u]| \leq h \quad \text{für alle } u \in B_1 \text{ und einer festen Zahl } h.$$

¹ L^{-1} braucht nicht zu existieren. Die Forderung besagt lediglich, daß eine spezielle Lösung existiert.

Dann besitzt die Aufgabe (1.1) mindestens eine Lösung, die den Nebenbedingungen

$$(1.6) \quad F_{\mu}[u] = H_{\mu}[u], \quad \mu = 1, \dots, n,$$

genügt, wenn die Determinante

$$(1.7) \quad \det(F_{\mu}[\varphi_v]) \neq 0$$

ist.

2. Zum Beweis treffen wir folgende Verabredung

V: Mit $\sigma = (\sigma_1(c), \dots, \sigma_n(c))$ bezeichnen wir als Sammelbezeichnung eine vom Vektor $c = (c_1, \dots, c_n)$ und eventuell noch anderen Variablen abhängende Vektorfunktion mit folgenden Eigenschaften:

α) Die Komponenten σ_i hängen stetig von den Komponenten c_j , $j = 1, \dots, n$, ab.

β) σ ist für alle festen Werte der eventuell noch auftretenden anderen Variablen beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $K = K(\sigma)$ mit

$$|\sigma_i| \leq K, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{für alle } c.$$

Wollen wir hervorheben, daß σ nur vom Vektor c abhängt, so schreiben wir $\sigma = \sigma^*$.

Man beachte, daß σ von Fall zu Fall verschiedene Ausdrücke darstellen kann. Zum Beispiel gilt¹ $\sigma \pm \sigma = \sigma$.

Mit dieser Verabredung V besitzt die Vektorgleichung $c = \sigma^*$ nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz eine Lösung $c = (c_j)$, denn der beschränkte n -dimensionale Bereich $|c_j| \leq K$ wird durch σ^* stetig in sich abgebildet².

3. Beweis des Existenzsatzes. Nach 1a) und 1b) ist eine Lösung u von (1.3) auch Lösung von (1.1). Wir zeigen, daß mit der Verabredung V für eine solche Lösung

$$(3.1) \quad \tilde{L}^{-1} M u = \sigma$$

gilt.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge $c_{(k)} = (c_{j(k)}), k = 1, 2, \dots$, die gegen einen Vektor c konvergiert, wobei gleichzeitig die nach 1b) eindeutig bestimmten Lösungen u_k der Gleichungen

$$u_k = \sum_{v=1}^n c_{v(k)} \varphi_v + \tilde{L}^{-1} M u_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

nicht gegen die Lösung u von (1.3) mit $c = (c_i)$ konvergieren. Es existierte dann eine positive Zahl δ und eine Teilfolge u_{k_j} mit

$$(3.2) \quad \|u - u_{k_j}\| \geq \delta, \quad j = 1, 2, \dots$$

Wegen der Vollstetigkeit von \tilde{L}^{-1} und (1.4) können wir annehmen, daß für diese Teilfolge bereits $\tilde{L}^{-1} M u_{k_j}$ gegen ein Element $\tilde{w} \in B_1$ konvergiert. Dann konvergiert u_{k_j} gegen eine Lösung $\tilde{u} = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v + \tilde{w}$ von (1.3); denn es gelten die Ungleichungen

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - \tilde{u}\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n |c_{v(k_j)} - c_v| \cdot \|\varphi_v\| + \lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{L}^{-1} M u_{k_j} - \tilde{w}\| = 0$$

¹ Die Funktion σ ist also ähnlich zu handhaben wie das Landausche Symbol O in der Zahlen- bzw. Funktionentheorie.

² Siehe etwa G. SANSONE e R. CONTI [7], S. 441 oder L. S. PONTRJAGIN [11], S. 79.

und

$$\left\| u_{kj} - \sum_{v=1}^n c_v(kj) \varphi_v - \tilde{L}^{-1} M u_{kj} \right\| = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Dies steht wegen der Eindeutigkeit der Lösung von (1.3) im Widerspruch zu (3.2).

Beachtet man, daß ein stetiges lineares Funktional auch beschränkt ist¹, so ergibt sich mit (1.5) und (3.1) durch Einsetzen von (1.3) in (1.6) wegen der Stetigkeit der Funktionale F_μ und H_μ mit V sofort

$$\sum_{v=1}^n c_v F_\mu[\varphi_v] = \sigma^*.$$

Wegen des Nichtverschwindens der Determinante (1.7) erhält man schließlich durch Auflösung dieses Gleichungssystems

$$c = \sigma^*,$$

woraus nach den obigen Bemerkungen die Existenz einer Lösung folgt.

Zusatz. Die Existenz einer Lösung von (1.1), (1.6) ist unter den übrigen Voraussetzungen offenbar auch dann schon gesichert, wenn wir in 1 b) voraussetzen, daß es eine Lösungsschar $u = u(c)$ von (1.3) gibt, die stetig vom Vektor c abhängt.

Vollstetigkeit des Operators \tilde{L}^{-1} sowie Eindeutigkeit der Lösung von (1.3) braucht dann nicht gefordert zu werden. Wir haben nur jeweils Lösungen der stetigen Schar zu nehmen, für die (3.1) gilt.

Ist die Bedingung (1.7) nicht erfüllt, so hat schon die Aufgabe

$$Lu = \Theta_2, \quad F_\mu[u] = A_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

im allgemeinen keine Lösung. Man kann den Satz auch so aussprechen, daß unter den übrigen Voraussetzungen [außer (1.7)] dann eine Lösung von (1.1), (1.6) existiert, wenn die vollhomogene Aufgabe

$$Lu = \Theta_2, \quad F[u] = 0$$

nur die Nulllösung $u = \Theta_1$ besitzt.

4. Zur Illustration des Satzes möge zunächst der Fall der gewöhnlichen nichtlinearen Gleichungssysteme behandelt werden:

$$(4.1) \quad Lu = Mu = g(u)$$

sei ein nichtlineares Gleichungssystem, L eine $m \times n$ -Matrix vom Range $m \leq n$, u ein n -Vektor ($n \times 1$ -Matrix) und $g(u)$ ein m -Vektor mit der Eigenschaft $|g_i(u)| \leq d$, für alle u , $i = 1, \dots, m$. Ist $m < n$, so sind die Banach-Räume² B_1 und B_2 verschieden (nämlich n - und m -Vektoren). Die Bedingungen 1 a–c können erfüllt werden. Insbesondere existiert wegen des Ranges m von L eine $n \times m$ -Matrix \tilde{L}^{-1} .

¹ $|F[u]| \leq N \|u\|$, s. z. B. KOLMOGOROV & FOMIN [10], S. 77.

² Man wähle irgendeine der üblichen Normen, z. B.

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^n |u_i| \quad \text{u. a.}$$

Man erhält diese z. B., indem man $n - m$ passende Spalten der Matrix L streicht, die gleichzahligen Zeilen von \tilde{L}^{-1} gleich Null und die übrigen Elemente von \tilde{L}^{-1} gleich den Elementen der Inversen der reduzierten Matrix L setzt¹. Ein Fundamentalsystem φ_v , $v = 1, \dots, n - m$, bekommt man durch Auflösung der Gleichungssysteme $Lu = 0$ mit $n - m$ linear unabhängigen Wertesystemen der freien Unbekannten².

Es können dann $n - m$ zusätzliche Bedingungen³ der Form (1.5), (1.6) vorgegeben werden. Über die Lösbarkeit des gesamten Systems entscheidet die Determinante (1.7).

5. Einen weiteren Gleichungstyp, auf den unser Satz anwendbar ist, stellen die *nichtlinearen Differenzengleichung* dar, bei denen die Nichtlinearität in einem additiven beschränkten Glied vorkommt. Der Operator L hat in diesem Falle die Gestalt⁴

$$(5.1) \quad Lf \equiv \Delta^n f(x) + a_1 \Delta^{n-1} f(x) + \dots + a_n f(x), \quad x \geq 0, \text{ ganz},$$

wobei die Koeffizienten a_i Funktionen von x sind, $a_i = a_i(x)$, die für alle ganzzahligen $x \geq 0$ endliche Werte annehmen mögen, oder durch Umformung von (5.1) nach einer bekannten Formel die Gestalt

$$(5.2) \quad Lf \equiv f(x + n) + b_1 f(x + n - 1) + \dots + b_n f(x), \quad b_v = b_v(x), \quad v = 1, \dots, n.$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion $b_n(x) \neq 0$ ist für alle ganzen $x \geq 0$.

Ist dann $\varphi_v(x)$ ein System linear unabhängiger Lösungen der homogenen Gleichung, $Lf = 0$, das für alle ganzen $x \geq 0$ definiert und endlich ist, so gilt bekanntlich⁵ [wegen $b_n(x) \neq 0$ ($x \geq 0$)] für die Determinante

$$(5.3) \quad D(x) = \det(\varphi_v(x + \mu - 1)) \neq 0 \quad (v, \mu = 1, \dots, n) \quad \text{für alle } x \geq 0,$$

und man kann mit Hilfe der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten⁵ einen Operator \tilde{L}^{-1} konstruieren, der die Gleichung $Lf = w(x)$ löst. Dieser Operator \tilde{L}^{-1} ist sicher vollstetig im Sinne der Norm⁶ in jedem endlichen Grundintervall $0 \leq x \leq p$ (x ganz). Besitzt daher das Gleichungssystem (1.3) mit $u = f(x)$ für jeden Vektor $c = (c_v)$ ein eindeutiges Lösungssystem⁷ $f_k = f(k)$, $k = 0, \dots, n - 1$, und ist $M(f)$ eine stetige und beschränkte Funktion von f , so sind die Voraussetzungen 1a—c des Satzes erfüllt.

¹ Dies braucht jedoch für den Existenzbeweis nicht durchgeführt zu werden.

² Das heißt, solcher $n - m$ Komponenten des Vektors u , bei deren Nullsetzen die Gleichung $Lu = 0$ nur die Nulllösung hat. Vgl. R. ZURMÜHL [13], S. 98f.

³ Da bei Vektoren ein stetiges lineares Funktional ebenfalls ein linearer homogener Ausdruck der Komponenten ist, kann natürlich hier das Gleichungssystem geschlossen behandelt werden. Eine solche Aufteilung wie oben ist nur vorteilhaft, wenn bei festen linken Seiten der ersten m Gleichungen die Lösbarkeit für verschiedene Koeffizientensysteme der übrigen $n - m$ Gleichungen untersucht werden soll. (1.7) ergibt dann einen linearen Ausdruck dieser Koeffizienten.

⁴ $\Delta^k f(x)$ sind die absteigenden Differenzen k -ter Ordnung. Siehe etwa G. SCHULZ [12], S. 69 oder A. O. GELFOND [14], S. 23.

⁵ Siehe etwa A. O. GELFOND [14], S. 266ff.

⁶ Zum Beispiel $\|f(x)\| = \sum_{k=0}^p |f(k)|$ oder $\|f(x)\| = \max_{0 \leq k \leq p} |f(k)|$ u. a.

⁷ Die stetige und eindeutige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten ist hier gewährleistet.

Diese Bedingungen sind z.B. bei der Differenzengleichung

$$\Delta^n f(x) = a(x) \sin f(x+k) + b(x)$$

erfüllt, wenn als Fundamentalsystem etwa $q_p(x) = x^p$, $p=0, \dots, n-1$, gewählt wird.

Als Nebenbedingungen (1.6) treten Bedingungen der Gestalt auf:

$$(5.4) \quad \sum_{\sigma=1}^N c_{\mu\sigma} f_{\sigma} = H_{\mu}[f_1, \dots, f_{\tau}] \quad \text{mit} \quad f_k = f(x_k) \quad (x_k \geq 0, \text{ ganz}) \quad (\mu = 1, \dots, n)$$

mit für $\sum_{k=1}^{\tau} |f_k| < \infty$ beschränkten, stetigen Funktionen H_{μ} .

Für die Lösbarkeit von (1.1), (5.4) [$u=f(x)$] ist dann die Bedingung

$$\det(\alpha_{\mu\nu}) = \det\left(\sum_{\sigma=1}^N c_{\mu\sigma} \varphi_{\nu}(x_{\sigma})\right) \neq 0$$

hinreichend. Der spezielle Fall der Anfangswertaufgabe $f(k) = A_k$, $k=0, \dots, n-1$, ist mit $D(0) \neq 0$ (in (5.3)) noch einmal in den Bedingungen (1.7) enthalten.

6. Bei *nichtlinearen Differentialgleichungen oder Integrodifferentialgleichungen*¹ bzw. Systemen solcher Gleichungen kann man, sofern ein Fundamentalsystem vorliegt, mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten² einen vollstetigen Operator \tilde{L} ¹ konstruieren. Es ist jedoch darauf zu achten, daß im Falle des Auftretens höherer Ableitungen in (1.6) die Stetigkeit der Funktionale gewährleistet bleibt. Die stetige Abhängigkeit der rechten Seite von (1.3) von den Konstanten c_v , $v=1, \dots, n$, entspricht dann der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von (1.1) von den Anfangswerten. Im Spezialfalle eines Systems von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$(6.1) \quad y'_i = g_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

oder einer expliziten Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$(6.2) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

stellen die Konstanten c_i unmittelbar bzw. bis auf eventuelle konstante Faktoren die Anfangswerte $y_i(x_0)$ bzw. $y^{(p)}(x_0)$, $p=0, \dots, n-1$, dar.

Die Bedingungen (1.6) erfassen z.B. die schon sehr allgemeinen Randbedingungen der Form (bei einer einzelnen Gleichung (6.2) n -ter Ordnung)

$$(6.3) \quad \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} c_{ijk} y^{(j)}(x_{ik}) + L_{ik}[y(x)] \right\} = A_i, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

mit Funktionaloperatoren

$$(6.3a) \quad L_{ik}[y(x)] = \int_{a_{ik}}^{b_{ik}} \int_{a_{ik}}^{\tau_k} \dots \int_{a_{ik}}^{\tau_2} g_{ik}(\tau_1, \dots, \tau_r) y(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_r,$$

¹ Im allgemeinen muß man dabei voraussetzen, daß die Integralanteile zu Mu gehören. Operatoren L mit ∞ -dimensionalem Nullraum erfordern eine gesonderte Betrachtung.

² Siehe etwa L. COLLATZ [8], S. 83 und 96 sowie W. M. WHYBURN [2] und die dort angegebene Literatur.

wobei die Konstanten a_{ik} , b_{ik} , x_{ik} einem Grundintervall $[a, b]$ angehören¹, oder Aufgaben mit Randbedingungen (bei einem System (6.1)) der Form

$$(6.4) \quad \int_{\gamma}^{\delta} dF(t) y(t) = c$$

mit einer Matrix $F(t)$, deren Elemente in dem zugrunde gelegten Intervall von beschränkter Variation sind, wie sie R. CONTI [6] behandelt. Aufgaben mit allgemeineren nichtlinearen Randbedingungen der Form (1.6) sind meines Wissens noch nicht behandelt worden. Es ergeben sich hierfür jedoch dieselben Bedingungen, da die Nichtlinearität auf der rechten Seite von (1.6) auftritt. Dagegen sind vielfach Spezialfälle von (6.3), (6.3a) bzw. (6.4), die auch in den Anwendungen auftreten², getrennt untersucht worden.

Hier ergibt sich aus (1.7) z. B. mit (6.2), (6.3) mit einer in dem Streifen $[a, b]$, $|y^{(p)}| < \infty$ beschränkten Funktion f , die so beschaffen ist, daß die Lösungen der Anfangswertaufgabe $y^{(p)}(x_0) = c_p$, $p = 0, \dots, n-1$, stetig von den Anfangswerten abhängen³, unmittelbar die für die Lösbarkeit hinreichende Bedingung, daß die Determinante Δ der Matrix

$$(6.5) \quad (\alpha_{ip}) = \left(\sum_{j=0}^p \sum_{k=1}^N \left(c_{ijk} \frac{x_{ik}^{p-j}}{(p-j)!} + L_{ik} \left[\frac{x^p}{p!} \right] \right) \right), \quad i, p = 0, \dots, n-1,$$

mit $x_{ik}^0 = 1$ für $x_{ik} = 0$ von Null verschieden ist. Dabei sind als Fundamentalsystem die Funktionen $\varphi_p = \frac{x^p}{p!}$, $p = 0, \dots, n-1$, mit den Ableitungen $\varphi_p^{(j)} = \frac{x^{p-j}}{(p-j)!}$ für $j \leq p$, $\varphi_p^{(j)} = 0$ für $j > p$, gewählt worden; und die Numerierung haben wir zweckmäßig von 0 bis $n-1$ laufen lassen.

Für den Spezialfall der Nicolettischen Aufgabe $y(x_i) = A_i$, $i = 0, \dots, n-1$, erhält man beispielsweise aus (6.3), (6.5) (mit $x_i^0 = 1$ für $x_i = 0$)

$$\det(\alpha_{ip}) = \det \left(\sum_{j=0}^p \delta_{j0} \frac{x_i^{p-j}}{(p-j)!} \right) = \det \left(\frac{x_i^p}{p!} \right) = \prod_{v=0}^{n-1} \frac{1}{v!} \cdot \prod_{\substack{\mu > v \\ \mu, v=0}}^{n-1} (x_{\mu} - x_v) \neq 0,$$

falls $x_{\mu} \neq x_v$ für $\mu \neq v$ gilt⁴.

Die Aufgabe (6.2), $y^{(r)}(x_i) = A_i$, $0 < r \leq n-1$ ist dagegen im allgemeinen nicht lösbar⁵: Hier ist $\alpha_{i0} = 0$ für alle i , also $\Delta = 0$.

¹ Die Aufgabe, bei der im Argument der L_{ik} noch Ausdrücke $y^{(p)}(x)$, $p = 1, \dots, n-1$, additiv hinzukommen, ist nicht allgemeiner, da die Ableitungen durch partielle Integration beseitigt werden können.

² W. M. WHYBURN [3].

³ Gewöhnlich wird hierfür vorausgesetzt, daß die Funktion f den Carathéodory-Bedingungen genügt, d. h. im Grundstreifen $[a, b]$, $|y^{(p)}| < \infty$, $p = 0, \dots, n-1$, für festes x stetig bezüglich $y^{(p)}$, $p = 0, \dots, n-1$, und für feste $y^{(p)}$ integrabel bezüglich x ist und ferner eine verallgemeinerte Lipschitz-Bedingung bzw. eine schwächere Bedingung von McSHANE erfüllt. Siehe etwa W. M. WHYBURN [2], R. CONTI [6] und E. J. McSHANE [9], S. 349.

⁴ Die bis auf die Faktoren $1/p!$ Vandermondsche Determinante (α_{ip}) stellt in den x_i , $v = 0, \dots, n-1$, ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades mit den Nullstellen x_{μ} , $\mu \neq v$, dar.

⁵ Zum Beispiel hat schon $y'' = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 1$ keine Lösung.

Für den speziellen Fall der Anfangswertaufgabe $y^{(i)}(x_0) = A_i$, $i = 0, \dots, n-1$, wird (1.7) die Wronskische Determinante, die nach den Voraussetzungen $\neq 0$ ist, und im speziellen Fall (6.2) mit dem Fundamentalsystem¹ $\varphi_p - \frac{(x-x_0)^p}{p!}$ ergibt sich aus (6.5) die Einheitsmatrix $\alpha_{ip} = \delta_{ip}$.

7. Von besonderem Interesse sind häufig die periodischen Lösungen $y(x+X) = y(x)$ der Differentialgleichung. Hier ergibt sich aus dem Existenzsatz unmittelbar der Satz von R. CONTI², daß die Gleichung (1.1) $[u = y(x) \text{ bzw. } u = (y_i(x))]$ unter den Voraussetzungen des Satzes mindestens eine periodische Lösung besitzt, wenn die Gleichung $Lu = \Theta$ als einzige periodische Lösung die Nulllösung hat. Allgemeiner können wir nach einer Lösung mit einer bestimmten Eigenschaft A fragen. Es ergibt sich aus dem Existenzsatz dann die einfache Folgerung:

Sind unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen B für die Gleichung (1.1) gewisse Nebenbedingungen der Form (1.6) hinreichend für die Existenz einer Lösung mit der Eigenschaft A , so existiert mindestens eine solche Lösung, wenn B erfüllt ist und die vollhomogene Aufgabe $Lu = \Theta$, $F_\mu[u] = 0$, mit den betreffenden Bedingungen nur die Nulllösung hat.

Der Satz von R. CONTI ist jedoch in manchen Fällen nicht anwendbar zum Nachweis einer periodischen Lösung. Zum Beispiel gilt dies schon für den Fall (6.2) oder bei Systemen (6.1) der Gestalt $y' = A(x)y + a(x, y)$ [A $n \times n$ -Matrix, y, a n -Vektoren], wenn nach Ausmultiplikation $A(x)y$ eine Komponente des Vektors y nicht auftritt. Dies ergibt sich auch aus den Bedingungen. Zum Beispiel erhält man für das Randwertproblem

$$(7.1) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x + X, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (X > 0)$$

mit den für die Periodizität einer Lösung notwendigen und hinreichenden Randbedingungen

$$(7.2) \quad y^{(i)}(0) - y^{(i)}(X) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \text{aus}^3 (6.5)$$

$$\alpha_{ip} = \begin{cases} \frac{0^{p-i}}{(p-i)!} - \frac{X^{p-i}}{(p-i)!} & \text{für } i \leq p \text{ mit } 0^0 = 1, \\ 0 & \text{für } i > p \end{cases}$$

und daher $\alpha_{ip} = 0$ für $i = n-1$, $p = 0, \dots, n-1$. (1.7) ist also nicht erfüllt.

Man kann jedoch auch hier die „Methode der Randwertaufgaben“ zum Nachweis periodischer Lösungen anwenden, wenn die Funktion f außer der Periodizität noch zusätzliche Eigenschaften besitzt⁴. Ist z. B. f so beschaffen, daß mit $y = \varphi(x)$ auch $y = \psi(x) = -\varphi(X-x)$ Lösung ist, so folgt aus den Gleichungen

$$(7.3) \quad \psi^{(2s)}(x) = -\varphi^{(2s)}(X-x), \quad \psi^{(2s+1)}(x) = \varphi^{(2s+1)}(X-x), \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

¹ Man beachte wieder, daß wegen $\varphi_0 = 1$ in der Determinante $0^0 = 1$ zu setzen ist.

² R. CONTI [6], S. 117.

³ Mit $L_{ih} = 0$, $N = 2$, $x_{i1} = 0$, $x_{i2} = X$, $c_{ijh} = (-1)^{h+1} \cdot \delta_{ij}$.

⁴ Dies ist bei Differentialgleichungen 2. Ordnung mehrfach durchgeführt worden. Siehe z. B. F. LETTENMEYER [19] und H. EHREMANN [22]. In [22] wird eine vollständige Übersicht über diese Fälle für Differentialgleichungen 2. Ordnung gegeben.

wobei die Ableitungen nach dem Argument zu nehmen sind, daß die Randbedingungen

$$(7.4) \quad y^{(2s)}(0) = 0, \quad y^{(2s)}\left(\frac{X}{2}\right) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, < \frac{n}{2},$$

hinreichend für die Periodizität der Lösung sind¹.

Es sei nun n gerade. Dann haben wir in (7.4) genau n Randbedingungen. Diese lassen sich erfüllen:

Man erhält aus (6.5) mit

$$L_{ik} \equiv 0, \quad N=1, \quad c_{ij} = \begin{cases} \delta_{j,i} & \text{für gerade } i \\ \delta_{j,i-1} & \text{für ungerade } i, \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } i \\ \frac{X}{2} & \text{für ungerade } i \end{cases} \quad (x_i^0 = 1 \text{ für } x_i = 0),$$

nach leichter Rechnung

$$\det(x_{ip}) = \left(\frac{X}{2}\right)^{n/2} \neq 0.$$

Spezielles Beispiel:

$$(7.5) \quad y^{(n)} + f(y) = c \sin \omega x, \quad n \text{ gerade}, \quad X = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ist $f(y)$ eine ungerade Funktion, so ist hier die Bedingung erfüllt, daß mit $\varphi(x)$ auch $\psi(x) = -\varphi(X-x)$ Lösung ist, wie man leicht durch Einsetzen erkennt. Ist $f(y)$ darüber hinaus noch stetig und beschränkt, so hat (7.5) eine periodische Lösung mit der Periode X .

Zum Beispiel besitzt die *verallgemeinerte Duffingsche Differentialgleichung*²

$$y^{(n)} + c_1 \sin y = c_2 \sin \omega x$$

für eine beliebige gerade Ordnung n mindestens eine periodische Lösung mit der Periode $X = 2\pi/\omega$.

Literatur

- [1] WHYBURN, W. M.: Functional properties of the solutions of differential systems. Trans. Amer. Math. Soc. **32**, 502–508 (1930).
- [2] WHYBURN, W. M.: Differential equations with general boundary conditions. Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 692–704 (1942).
- [3] WHYBURN, W. M.: Differential systems with boundary conditions at more than two points. Proceedings of the Conference on Differential Equations Univ. of Maryland 1–21, 1956.
- [4] CONTI, R.: I problemi ai limiti lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Teoremi di esistenza. Ann. Mat. Pura Appl. **35**, 155–182 (1953).
- [5] CONTI, R.: Problemi ai limiti lineari generali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Un teorema di esistenza. Boll. Un. Mat. Ital. **8**, 153–158 (1953).

¹ $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gehen durch Spiegelung am Punkte $x=X/2$, $y=0$ auseinander hervor. Mit den Randbedingungen (7.4) fallen beide Lösungen wegen (7.3) und wegen der Eindeutigkeit der Anfangswertaufgabe zusammen und genügen daher mit (7.4) auch den Periodizitätsbedingungen (7.2).

² Für $n=2$ ist diese Gleichung viel und eingehend untersucht worden. Siehe z.B. G. DUFFING [15], G. HAMEL [16], R. IGLISCH [17], [18], W. BADER [21] u.a.

- [6] CONTI, R.: Sistemi differenziali ordinari con condizioni lineari. Ann. Mat. Pura Appl. **46**, 109—130 (1958).
- [7] SANSONE, G., e R. CONTI: Equazioni Differenziali non Lineari. Roma 1956.
- [8] COLLATZ, L.: Differentialgleichungen für Ingenieure, 2. Aufl. Stuttgart 1960.
- [9] MCSHANE, E. J.: Integration. Princeton University Press 1947.
- [10] KOLMOGOROV, A. N., & S. V. FOMIN: Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, vol. 1. Rochester, N.Y. 1957.
- [11] PONTRJAGIN, L. S.: Grundzüge der kombinatorischen Topologie. Berlin 1956.
- [12] SCHULZ, G.: Formelsammlung zur praktischen Mathematik, Sammlung Götschen Nr. 1110. Berlin 1945.
- [13] ZURMÜHL, R.: Matrizen, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
- [14] GELFOND, A. O.: Differenzenrechnung. Berlin 1958.
- [15] DUFFING, G.: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig 1918.
- [16] HAMEL, G.: Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. Math. Ann. **86** (1922).
- [17] IGLISCH, R.: Zur Theorie der Schwingungen. Mh. Math. Phys. **37**, 39 (1942).
- [18] IGLISCH, R.: Über die Lösungen des Duffingschen Schwingungsproblems bei großen Parameterwerten. Math. Ann. **111** (1935).
- [19] LETTENMEYER, F.: Über die von einem Punkt ausgehenden Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dtsch. Math. **7**, 56—74 (1943).
- [20] EPHESER, H.: Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **61**, 435—454 (1955).
- [21] BADER, W.: Vortrag bei der Fachtagung der Nachrichtentechnischen Gesellschaft im VDE, Stuttgart 1959, NTF 21, 1960.
- [22] EH RMANN, H.: Nachweis periodischer Lösungen bei gewissen nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen. Arch. Rational Mech. Anal. **1**, 124—138 (1957).

Mathematisches Institut A
der Technischen Hochschule
Stuttgart

(Eingegangen am 16. Dezember 1960)

EDITORIAL BOARD

R. BERKER
Technical University
Istanbul

L. CESARI
University of Michigan
Ann Arbor, Michigan

L. COLLATZ
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hamburg

A. ERDÉLYI
California Institute of Technology
Pasadena, California

J. L. ERICKSEN
The Johns Hopkins University
Baltimore, Maryland

G. FICHERA
Istituto Matematico
Università di Roma

R. FINN
Stanford University
California

HILDA GEIRINGER
Harvard University
Cambridge, Massachusetts

H. GÖRTLER
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg i. Br.

D. GRAFFI
Istituto Matematico, „Salvatore Pincherle“
Università di Bologna

A. E. GREEN
King's College
Newcastle-upon-Tyne

J. HADAMARD
Institut de France
Paris

L. HÖRMANDER
Department of Mathematics
University of Stockholm

M. KAC
Cornell University
Ithaca, New York

E. LEIMANIS
University of British Columbia
Vancouver

C. C. LIN
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Massachusetts

W. MAGNUS
Institute of Mathematical Sciences
New York University
New York City

G. C. McVITTIE
University of Illinois Observatory
Urbana, Illinois

J. MEIXNER
Institut für Theoretische Physik
Technische Hochschule Aachen

C. MÜLLER
Institut für Reine u. Angewandte
Mathematik
Technische Hochschule Aachen

W. NOLL
Carnegie Institute of Technology
Pittsburgh, Pennsylvania

A. OSTROWSKI
Certenago-Montagnola
Ticino

R. S. RIVLIN
Division of Applied Mathematics
Brown University
Providence, Rhode Island

M. M. SCHIFFER
Stanford University
California

J. SERRIN
Institute of Technology
University of Minnesota
Minneapolis, Minnesota

E. STERNBERG
Division of Applied Mathematics
Brown University
Providence, Rhode Island

R. A. TOUPIN
Naval Research Laboratory
Washington 25, D.C.

C. TRUESDELL
c/o Springer-Verlag
Heidelberg

H. VILLAT
47, bd. A. Blanqui
Paris XIII

CONTENTS

CORNELIUSSEN, A. H., & R. T. SHIELD, Finite Deformation of Elastic Membranes with Application to the Stability of an Inflated and Extended Tube	273
MÜLLER, C., und H. NIEMEYER, Greensche Tensoren und asymptotische Gesetze der elektromagnetischen Hohlraumschwingungen . .	305
EHRMANN, H., Ein Existenzsatz für die Lösungen gewisser Gleichungen mit Nebenbedingungen bei beschränkter Nichtlinearität	349